

אלגברה לינארית א'

מההרצאות של מר' ישראל פרידמן
מרכז הבינתחומי הרצליה
סמסטר א', שנה א', 2009

68.....	שיעור 8-א (08.12.09)	1.....	שיעור 1-א (20.10.09)
68.....	מרחבים לינאריים	1.....	משוואות לינאריות
73.....	שיעור 8-ב (10.12.09)	3.....	שיעור 1-ב (23.10.09)
73.....	תת מרחבים	3.....	מערכת משוואות לינאריות
77.....	שיעור 9-א (15.12.09)	4.....	Gaussian Elimination
79.....	סכום של תת-מרחבים	6.....	שיעור 2-א (27.10.09)
82.....	שיעור 9-ב (17.12.09)	7.....	האלגוריתם המלא
87.....	שיעור 10-א (22.12.09)	10.....	שיעור 2-ב (29.10.09)
הקשר בין קבוצות בלתי תלויות שפורשות		12.....	מערכת לינארית הומוגנית
87.....	אותו מרחב לינארי	13.....	שיעור 3-א (03.11.09)
88.....	בסיסים	13.....	וקטורים, מטריצות ופעולות ביניהם
92.....	שיעור 10-ב (24.12.09)	14.....	פעולות עם וקטורים
96.....	שיעור 11-א (29.12.09)	19.....	שיעור 3-ב (05.11.09)
96.....	מרחבים לינאריים הקשורים למטריצות	20.....	פעולות על מטריצות
100.....	שיעור 11-ב (31.12.09)	26.....	שיעור 4-א (10.11.09)
104.....	שיעור 12-א (05.01.10)	32.....	שיעור 4-ב (12.11.09)
108.....	שיעור 12-ב (07.01.10)	34.....	המטריצה At (משוחלפת / Transpose)
משפט המימד לסכום חיתוך של תת-		35.....	
108.....	מרחבים	36.....	מטריצה היחידה (Identity Matrix)
112.....	שיעור 13-א (12.01.09)	37.....	שיעור 5-א (17.11.09)
הצגת וקטור בבסיס מסוים - וקטור		37.....	מטריצה הפיכה (Invertible matrix)
112.....	קואורדינטות	42.....	שיעור 5-ב (19.11.09)
116.....	שיעור השלמה (13.01.09)	47.....	שיעור 6-א (24.11.09)
116.....	מעבר מבסיס לבסיס	47.....	מטריצות משולשיות (Triangular matrix)
ייצוג אותו וקטור לפי שני בסיסים שונים...		49.....	דטרמיננטות (Determinants)
117.....		52.....	שיעור 6-ב (26.11.09)
121.....	שיעור 13-ב (14.01.09)	57.....	שיעור 7-א (1.12.09)
121.....	מספרים מרוכבים	63.....	שיעור 7-ב (3.12.09)
124.....	משפט דה מואבר (De Moivre)	64.....	המטריצה הצמודה (Adjugate matrix)
125.....	הוצאת שורשים ב-C		שיטת קרמר לפתרון מערכת משוואות
126.....	Quick Reference	66.....	Cramer's Rule)
129.....	אינדקס		

תאריך עדכון אחרון של קובץ זה הוא

שני, 15מרץ, 2010

עדכונים וכתב הויתור (שווה לקרוא) נמצאים באתר

<http://idc.gadi.cc/compsci/>

הסיכומים הוכנו ע"י גדי כהן
סטודנט לתואר מדעי המחשב

שיעור 1-א (20.10.09)

משוואות לינאריות

הגדרה: משוואה מהצורה $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$,

שבה $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ נחשבים לקבועים

ו- $x_1, x_2, \dots, x_n$ הם נעלמים,

נקראת משוואה לינארית.

דוגמאות:

משוואה לינארית בנעלם אחד $ax + b$

(1) אם $a \neq 0$ אז $x = \frac{b}{a}$ הוא הפתרון היחיד למשוואה
(קבוצת הפתרונות היא נקודה אחת).

(2) אם $a = 0$

(a) אם $b \neq 0$ למשוואה $ax = b$ שהיא בעצם $0x = b$ (קבוצת נקודות ריקה)
אין פתרון.

(b) אם $b = 0$ אז $0x = 0$ (קבוצת הפתרונות כל הישר הממשי)

משוואות בשני נעלמים $a_1x_1 + a_2x_2 = b$

למשל $2x_1 + 3x_2 = 7$

אז $x_1 = 2, x_2 = 1$ פתרון

וגם $x_1 = 5, x_2 = -1$ פתרון

וכו'.

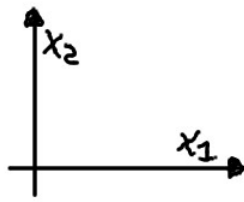
באופן כללי לכל בחירה של x_2 קיים x_1 יחיד הפותר את המשוואה.

לכן אם נרשום למשל $x_2 = t$ אז $2x_1 + 3t = 7$ כלומר $x_1 = \frac{1}{2}(7 - 3t)$.

מסקנה: פתרון של משוואה (לינארית) בשני נעלמים הוא זוג סדור של מספרים (x_1, x_2) .

כל פתרונות המשוואה $2x_1 + 3x_2 = 7$

הם $(x_1, x_2) = (\frac{-1}{2}(7-3t), t)$ כאשר t חופשי (מספר ממשי כלשהו).



(זה משוואה של ישר במישור. למשל במערכת

$$x_2 = \frac{-2}{3}x_1 + \frac{7}{3}$$

באופן כללי:

1. אם $a_2 \neq 0$ אז קבוצת כל הפתרונות במשוואה $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ היא $x_2 = \frac{a_1}{a_2}x_1 + \frac{b}{a_2}$

כל הפתרונות הם מהצורה $\left(x_1, -\frac{a_1}{a_2}x_1 + \frac{b}{a_2}\right)$

2. אם $a_2 = 0$ ולכן $a_1x_1 + 0x_2 = b$:

1. אם $a_1 \neq 0$ אז כל הפתרונות הם $\left(\frac{b}{a_1}, x_2\right)$ כאשר x_2 חופשי.

2. אם $a_1 = 0$ אז המשוואה היא $0x_1 + 0x_2 = b$ ואז

1. אם $b \neq 0$ אז קבוצת הפתרונות ריקה.

2. אם $b = 0$ אז כל נקודה (x_1, x_2) הוא פתרון. לכן קבוצת הפתרונות היא במישור כולו.

שיעור 1-ב (23.10.09)

משוואות לינאריות אלו משוואות מצורת $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$

(זאת משוואה ב-n נעלמים: $x_1, x_2, \dots, x_n$).

סדר המשתנים קובע סוג הפתרונות.

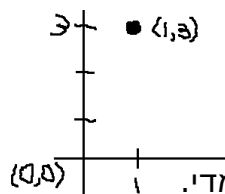
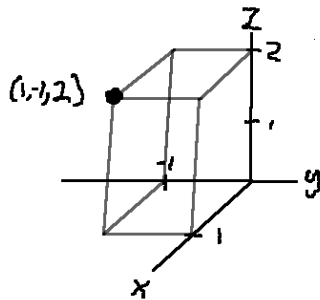
הגדרה: פתרון של משוואה לינארית ב-n נעלמים $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ הוא n-יה סדורה (שלישייה, חמישייה וכו') של n מספרים $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ כך ש- $a_1t_1 + a_2t_2 + \dots + a_nt_n = b$.

דוגמאות:

א. (3) הוא פתרון למשוואה $2x = 6$ (מותר לרשום 3 במקום (3)).

ב. (1,3) הוא פתרון למשוואה $x_1 + 2x_2 = 7$ (אבל (3,1) אינו פתרון למשוואה).

ג. (1,2,-1) הוא פתרון של $2x_1 + x_2 - 3x_3 = -5$



הערות חשובות

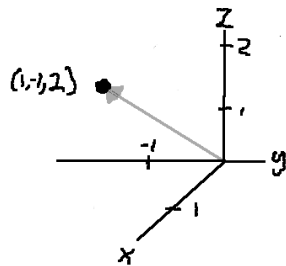
א. (3) מייצג נקודה על הישר הממשי.

ב. (1,3) מייצג נקודה במישור.

ג. (1,2,-1) מייצגת נקודה במרחב התלת מימדי.

הגדרה: n-יה סדורה $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ של מספרים ממשיים

נקראת **וקטור** במרחב ה-n מימדי. (זו בעצם נקודה במרחב ה-n מימדי).



בפדיקה יש לוקטור גודל וכיוון (אורך וזווית).

במתמטיקה הוא מתאר נקודה במרחק מהראשית.

מערכת משוואות לינאריות

מערכת שבה כל המשוואות הן לינאריות נקראת מערכת לינארית.

חייבים לקבוע מראש את מספר הנעלמים של המערכת.

דוגמאות:

1. $\{2x_1 = 3\}$ מערכת בנעלם אחד. יש לה פתרון יחיד והוא $x = \frac{3}{2}$.

2. $\{2x_1 + 0x_2 = 3\}$ מערכת בשני נעלמים. יש לה אין סוף פתרונות $(\frac{3}{2}, x_2)$ (x_2 חופשי).

הגדרה: **פתרון** למערכת לינארית ב-n נעלמים הוא n-יה סדורה שהוא פתרון לכל המערכת.

Gaussian Elimination

פתרון מערכת לינארית בשיטת הדירוג

אלה הן הפעולות היחידות שבהן נשתמש והן משלושה סוגים בלבד.

1. החלפת מקומות בין שתי משוואות.
2. הכפלת משוואה במספר שונה מ-0.
3. הוספת כפולה במספר של משוואה מסוימת למשוואה אחרת.

דוגמה: מצא את כל הפתרונות המערכת.

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{lclcl} x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & +x_2 & -2x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & 3 \end{array} \right. & \xrightarrow{\substack{-2R_1+R_2 \rightarrow R_2 \\ -3R_1+R_3 \rightarrow R_3}} & \left\{ \begin{array}{lclcl} x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 0 \\ -3x_2 & -4x_3 & = & -1 \\ -4x_2 & -2x_3 & = & 3 \end{array} \right. & \begin{array}{l} \text{מערכת} \\ \text{בשני נעלמים} \end{array} \end{array}$$

$$\xrightarrow{-R_3+R_2 \rightarrow R_2} \left\{ \begin{array}{lclcl} x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 0 \\ & x_2 & -2x_3 & = & 0 \\ & -4x_2 & -2x_3 & = & 3 \end{array} \right. \xrightarrow{4R_2+R_3 \rightarrow R_2} \left\{ \begin{array}{lclcl} x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 0 \\ & x_2 & -2x_3 & = & 0 \\ & & -10x_3 & = & 13 \end{array} \right.$$

$$\xrightarrow{\frac{-1}{10}R_3 \rightarrow R_3} \left\{ \begin{array}{lclcl} x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 0 \\ & x_2 & -2x_3 & = & 0 \\ & & x_3 & = & \frac{13}{10} \end{array} \right. \xrightarrow{\substack{-R_3+R_1 \rightarrow R_1 \\ 2R_3+R_2 \rightarrow R_2}} \left\{ \begin{array}{lclcl} x_1 & +2x_2 & & = & \frac{-13}{10} \\ & x_2 & & = & \frac{-7}{5} \\ & & x_3 & = & \frac{13}{10} \end{array} \right.$$

$$\xrightarrow{-2R_2+R_1 \rightarrow R_1} \left\{ \begin{array}{lclcl} x_1 & & & = & \frac{-14}{5} - \frac{13}{10} \\ & x_2 & & = & \frac{-7}{5} \\ & & x_3 & = & \frac{13}{10} \end{array} \right.$$

לכן למערכת יש פתרון יחיד והוא $\left(\frac{3}{2}, -\frac{7}{5}, \frac{13}{10} \right)$.

הערה: במהלך פתרון המערכת, השתנה רק מקדמי הנעלמים כאשר לנעלמים יש רק תפקיד אחד: להצביע על מקומם של מקדמים אלה. לכן, נרשום בהמשך את מקדמי המשוואות בלוח מלבני הנקרא **מטריצה** ונפעל את הפעולות האלמנטריות רק על שורת המטריצה.

דוגמה: לפתור את המערכת.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

פתרון: במקום לדרג את כל המערכת, נדרג את מטריצת המקדמים שלה:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right) & \xrightarrow[\begin{array}{l} -2R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \\ -R_1 + R_3 \rightarrow R_3 \end{array}]{\begin{array}{l} \boxed{1} \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{3R_2 + R_3 \rightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

לכן למערכת הנתונה שקולה למערכת שבה שורת השלישית $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -2$ לכן למערכת הנתונה אין פתרון.

דוגמה לשימוש **לא נכון** של פעולות על מטריצה.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\begin{array}{l} -R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \\ -R_1 + R_1 \rightarrow R_1 \end{array}]{\begin{array}{l} \boxed{1} \end{array}} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ \boxed{1} & -1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 + R_2 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

הגענו ל"פתרון" שאינו קיים.

לכן אסור להשתמש שוב בשורה שקילקלנו אותו באותה המטריצה.

שיעור 2-א (27.10.09)

פתרון מערכת לינארית בשיטת הדירוג

ראינו שמספיק לדרג את מטריצת המערכת. דירגנו רק בעזרת פעולות אלמנטריות.

מטרת הדירוג: להגיע למטריצה מדורגת **קנונית**, בעלת תכונות הבאות:

1. בכל שורה שאינה כולה אפסים, האיבר הראשון משמאל (שאינו 0) הוא 1 (איבר פותח).
2. בכל שורה, האיבר הפותח מופיע מימין לאיבר הפותח של השורה שמעליה (אם יש כזו).
3. בכל עמודה שבה יש איבר פתוח, כל שאר האיברים הם אפסים.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & \square & \square & \square & \square \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \square & \square \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \square \end{array} \right)$$

דוגמאות:

$$\left(\begin{array}{cccccc} 0 & \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{array} \right)$$

1. לא מדורגת קנונית כי בעמודה של האיבר הפתוח הרביעי יש איבר שאינו אפס.

$$\left(\begin{array}{cccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \end{array} \right)$$

2. לא מדורגת כי האיבר הפותח של השורה השלישית היא משאל מאיבר הפתוח של שורה השנייה.

אלגוריתם הדירוג

יצירת מדרגה ראשונה במטריצה.

1. יש למצוא את העמודה השמאלית ביותר שאינה כולה אפסים, וליצור על-ידי פעולות אלמנטריות 1 בשורה הראשונה בעמידה זו.

2. מאפסים את כל שאר האיברים באותה העמודה.

$$\left(\begin{array}{cc} 0 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{step 1}} \left(\begin{array}{cc} 1 & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{array} \right) \xrightarrow{\text{step 2}} \left(\begin{array}{cc} 1 & \square \\ 0 & \square \\ 0 & \square \end{array} \right)$$

האלגוריתם המלא

בכל שלב, המטריצה מחולקת לשניים:

- (1) חלק העליון - מדורג
- (2) חלק תחתון - לא מדורג.

בשלב התחלתי החלק המדורג הוא ריק וחלק הלא מדורג הוא המטריצה כולה.

I. בניית מטריצת מדורגת.

1. יוצרים מדרגה ראשונה בחלק הלא מדורג של המטריצה.
 2. השורה הראשונה של החלק הלא מדורג מצטרפת לחלק המדורג.
- שלב זה מסתיים ברגע שחלק הלא מדורג הוא ריק.

II. בניית דירוג קנוני

1. בכל עמודה שבה יש איבר פתוח, מאפסים את כל האיברים שמעל האיבר הפתוח. (הכי קל ללכת אחורה, מהשורה האחרונה).

תרגול: לפתור את המערכת:

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$$

פתרון: ליצור את מטריצת המערכת.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array} \right)$$

יצירת מדרגה ראשונה בחלק הלא מדורג.

$$\xrightarrow{-R_1+R_2 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{-2R_1+R_2 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \text{חלק מדורג} \\ \leftarrow \text{חלק הלא מדורג} \end{array}$$

$$\xrightarrow{-9R_1+R_3 \rightarrow R_3}$$

(המשך בדף הבא)

יצירת מדרגה ראשונה בחלק הלא מדורג.

$$\xrightarrow{-2R_2+R_3 \rightarrow R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{11}R_2+R_2 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{5}{11} & \frac{-1}{11} & \frac{10}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

עד כאן הדירוג. עכשיו לדירוג קנוני.

$$\xrightarrow{2R_1+R_1 \rightarrow R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & \frac{-1}{11} & \frac{9}{11} & \frac{-2}{11} \\ 0 & \boxed{1} & \frac{5}{11} & \frac{-1}{11} & \frac{10}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

המערכת הנתונה שקולה למערכת הבאה.

מסקנה:

$$\begin{cases} \boxed{x_1} & -\frac{1}{11}x_3 & +\frac{9}{11}x_4 & =\frac{-2}{11} \\ & \boxed{x_2} & +\frac{5}{11}x_3 & -\frac{1}{11}x_4 & =\frac{10}{11} \end{cases}$$

כלומר, לכל בחירה של x_3 ו- x_4 , נקבעים באופן יחיד x_1 ו- x_2 , כך ש- (x_1, x_2, x_3, x_4) יהיה פתרון למערכת. כאשר:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-2}{11} + \frac{1}{11}x_3 - \frac{9}{11}x_4 \\ x_2 &= \frac{10}{11} - \frac{5}{11}x_3 + \frac{1}{11}x_4 \end{aligned}$$

לכן, כל פתרונות המערכת:

$$\left\{ -\frac{2}{11} + \frac{1}{11}x_3 - \frac{9}{11}x_4, \frac{10}{11} - \frac{5}{11}x_3 + \frac{1}{11}x_4, x_3, x_4 \right\}$$

כאשר x_3 ו- x_4 חופשיים.

השיטה לבחירת משתנים קשורים ומשתנים חופשיים בפתרון מערכת משוואות

קודם כל מדרגים את מטריצת המערכת. הכלל הוא:

1. כל משתנה שבעמודה שלו מופיע איבר פותח הוא משתנה **קשור** (תלוי באחרים)
2. כל משתנה אחר הוא **חופשי**.

תרגול: בניח שלאחר דירוג המטריצה של מערכת משוואות קיבלנו:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

מה הפתרון הכללי של המערכת?

תשובה: קשורים x_2, x_4
חופשיים x_1, x_3

$$\begin{cases} \boxed{x_2} + 2x_3 = 1 \\ \boxed{x_4} = 1 \end{cases}$$

$$x_2 = 1 - 2x_3$$

לכן הפתרון הכללי הוא:

$$(x_1, 1 - 2x_3, x_3, 1)$$

כאשר x_1, x_3 חופשיים.

שיעור 2-ב (29.10.09)

כמה מסקנות משיטת הדירוג

1. למערכת משוואות לינארית יש פתרון אם ורק אם במהלך הדירוג לא מתקבלת שורה מצורת $(00...0|1)$.

הסדר: אם אין שורה כזו עד סוף הדירוג אז מטריצת המערכת שקולה ל-

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & 0 & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{array} \right)$$

במצב זה, לאחר מעבר הביטויים שבהם משתנים חופשיים לאגף ימין, בכל משוואה נוכל למצוא עבור כל בחירה של המשתנים החופשיים, ערכים מתאימים למשתנים הקשורים כדי למצוא פתרון (פתרונות) למערכת.

דוגמה: נניח שהגענו בסוף הדירוג למטריצה

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

לכן המערכת הנתונה שקולה ל-

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 + 2x_6 = 5 \\ x_4 + 3x_6 = 6 \\ x_5 + x_6 = 7 \end{cases}$$

נבודד את כל משתנה:

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{חופשי} \\ x_2 &= 5 - 2x_3 - 2x_6 \\ x_3 &= \text{חופשי} \\ x_4 &= 6 - 3x_6 \\ x_5 &= 7 - 4x_6 \\ x_6 &= \text{חופשי} \end{aligned}$$

לכל בחירה של x_1, x_3, x_6 יש פתרון למערכת.

2. אם למערכת לינארית יש פתרון, ואם קיים בה משתנה חופשי, אז למערכת יש אינסוף פתרונות.

3. למערכת יש פתרון יחיד אם ורק אם יש לה פתרון אבל אין משתנים חופשיים (כלומר כל המשתנים קשורים).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \square \\ 0 & 1 & 0 & \square \\ 0 & 0 & 1 & \square \end{array} \right) \quad \text{דוגמה:}$$

לכל משתנה יש ערך אחד ויחיד שהוא יכול לקבל.

הערה: יתכן שלמערכת יש משתנים חופשיים אבל אין לה פתרון.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \leq \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 = 1 \end{cases} \quad \text{למשל:}$$

4. למערכת לינארית ב-n נעלמים, (מספר המשתנים החופשיים) = (מספר המשתנים הקשורים) - n.

5. במטריצה מדורגת, מספר השורות השונות מ-0 שווה למספר האיברים הפותחים. לכן מספר השורות השונות מ-0 שווה למספר העמודים שבהן יש איברים פותחים.

שאלה: הוכח או הפרך:

אם $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ו- $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ פתרונות של מערכת לינארית אז:

$$(1) \quad (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \quad \text{פתרון.}$$

$$(2) \quad \left(\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}y_1, \dots, \frac{1}{3}x_n + \frac{2}{3}y_n \right) \quad \text{פתרון.}$$

תשובה: נביח שהמערכת הוא:

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + \dots + a_{1n}t_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}t_1 + a_{m2}t_2 + \dots + a_{mn}t_n = b_m \end{cases}$$

אז למשל (חלק 1):

$$\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ + \quad a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n = b_1 \\ \hline a_{11}(x_1 + y_1) + \dots + a_{1n}(x_n + y_n) = 2b_1 (\neq b_1) \end{array}$$

(כי שניהם פתרונות של המערכת הראשונה). לכן הטענה לא נכונה.

ולחלק 2:

$$\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ + \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \hline a_{11}(\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}y_1) + \dots + a_{1n}(\frac{1}{3}x_n + \frac{2}{3}y_n) = b_1 \end{array}$$

לכן הוכחנו שהטענה נכונה.

מערכת לינארית הומוגנית

אלה מערכת שבהן כל משוואה היא מהצורה $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$.

משפט: למערכת הומוגנית יש תמיד פתרון אחד לפחות והוא $(0, 0, \dots, 0)$. פתרון זה נקרא **הפתרון הטריויאלי**.

הערה: במהלך הדירוג של מטריצה של מערכת הומוגנית, העמודה האחרונה נשארת תמיד עמודה אפסים. לכן אפשר לוותר עליה במהלך הדירוג.

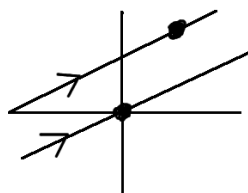
הגדרה: במטריצת המקדמים של מערכת לינארית

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

מבחינים בין מטריצת המקדמים של נעלמי המערכת

$$\left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right)$$

הנקראת **מטריצה מצומצמת לבין** מטריצת המערכת כולו הנקראת **מטריצה מורחבת** (Augmented Matrix).



הערה: במערכת הומוגנית (משהו) בדירוג המטריצה המצומצמת.

(אם יודעים נקודה אחר, אפשר ליצור עוד קו המקביל לקו העובר דרך הראשית).

שיעור 3-א (03.11.09)

וקטורים, מטריצות ופעולות ביניהם

הגדרות: **וקטור** - n-יה סדורה של מספרים. $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

מטריצה מסדר $(n \cdot k)$ היא מלבן של $n \cdot k$ מספרים המסודרות ב-n שורות ו-k עמודות.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix}$$

או בקיצור: $A = [a_{ij}]$ ($1 \leq j \leq k, 1 \leq i \leq n$)
כאשר a_{ij} מסמן את המספר הנמצא בשורה i ועמודה j במטריצה.

דוגמאות:

1. מטריצה מסדר $(1 \times n)$.
קוראים לה גם וקטור שורה.
 $[a_1, a_2, \dots, a_n]$

2. מטריצה מסדר $(n \times 1)$.
קוראים לה גם וקטור עמודה.
 $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

3. מטריצה מבסדר $(n \times n)$.
קוראים לה גם מטריצה ריבועית.
 $\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

הגדרה: **שוויון מטריצות.** שתי מטריצות $A = [a_{ij}]$ ו- $B = [b_{ij}]$ נקראות שוות אם יש להם אותו סדר ו- $a_{ij} = b_{ij}$ לכל i, j.

דוגמאות:

1. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (אין להן אותו סדר)

2. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0.000001 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

פעולות עם וקטורים

הגדרה: **חיבור וקטורים:** לכל שתי וקטורים ב- $\mathbb{R}^n$,

$$\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \text{ ו- } \underline{y} = (y_1, \dots, y_n)$$

מגדירים את הסכום שלהם כך:

$$\underline{x} + \underline{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

קבוצת החיבור היא שוב וקטור ב- $\mathbb{R}^n$.

הגדרה: **כפל של וקטור בסקלר (מספר)**

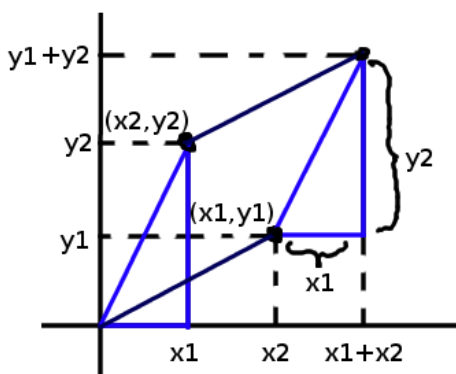
לכל וקטור $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ב- $\mathbb{R}^n$ ולכל סקלר $\lambda \in \mathbb{R}$

מגדירים את הכפל בסקלר λ של $\underline{x}$ כך:

$$\lambda \underline{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

התוצאה היא וקטור ב- $\mathbb{R}^n$.

משמעות גאומטרית של חיבור ב- $\mathbb{R}^2$



לפי ההגדרה: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

לכן, ב- $\mathbb{R}^2$ הנקודות הן

$$\underline{0}, \underline{x}, \underline{y}, \underline{x} + \underline{y}$$

שהן נקודות של מקבילית.

($\underline{x} + \underline{y}$) הוא קודקוד הרביעי

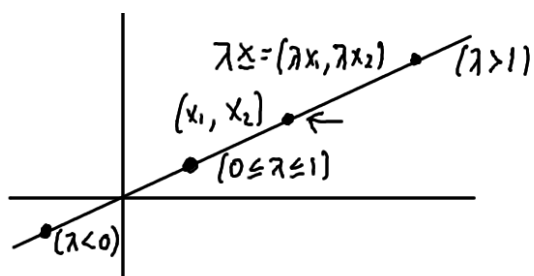
במקבילית הנקבעים על ידי ($\underline{y}, \underline{x}, \underline{0}$)

הוכחה: צלע 1: $d((0,0), (x_1, y_1)) = \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

צלע 2: $d((x_2, y_2), (x_1 + x_2, y_1 + y_2)) = \sqrt{(x_1 + x_2 - x_2)^2 + (y_1 + y_2 - y_2)^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

לכן מדובר במרובע שבו יש שתי צלעות נגדיות שוות.
כנ"ל לגבי זוג הצלעות השני. לכן המרובע היא מקבילית.

הפירוש הגאומטרי של כפל וסקלר



הסבר: הנקודות $0, x, \lambda x$ על אותו הישר.

לכן קבוצות הנקודות כשאר $x \neq 0$
 $\{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ היא ישר העובר
 דרך x הראשית.

הערות: אפשר להוכיח טענות דומות ב- $\mathbb{R}^3$ וגם ב- $\mathbb{R}^4$.

נורמה של וקטור מכפלים סקלרים

הקדמה: המרחק של נקודה $x = (x_1, \dots, x_n)$ (ב- $\mathbb{R}^2$) מן הראשית הוא

$$d(x, 0) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

הגדרה: **נורמה (norm)** של וקטור $x \in \mathbb{R}^n$ מוגדרת כך:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

(המרחק של x מן הראשית)

מסקנה: המרחק בין שתי נקודות $x = (x_1, \dots, x_n)$ ו- $y = (y_1, \dots, y_n)$ ב- $\mathbb{R}^2$ הוא

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

מצד שני

$$x - y = x + (-1)y = (x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n)$$

לכן

$d(x, y) = \|x - y\|$

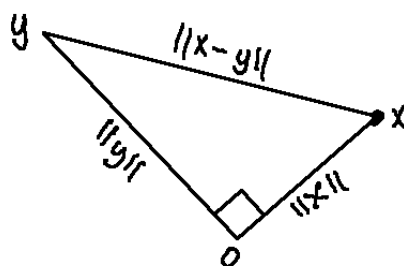
$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)$$

טענה:

הוכחה:

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= (x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2 \\ &= \underbrace{(x_1^2 + \dots + x_n^2) + (y_1^2 + \dots + y_n^2)}_{\|x\|^2 + \|y\|^2} - \underbrace{2(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)}_{\text{ביטוי שקשור לזווית בין } x \text{ ל-} y} \end{aligned}$$

הערה:

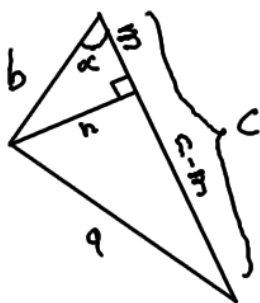


משפט הקוסינוס

(הכללה של משפט פיתגורס)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

משפט:



הוכחה:

$$\begin{aligned} b^2 - m^2 &= h^2 = a^2 - (c - m)^2 \\ b^2 - m^2 &= a^2 - c^2 + 2mc - m^2 \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2mc \end{aligned}$$

$$\cos \alpha = \frac{m}{b} \quad m = b \cos \alpha$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2mc = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$\boxed{\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}} \quad \text{לכן:}$$

מסקנה: אם x, y וקטורים שונים מ-0 במרחב $\mathbb{R}^n$

$$\cos(x, y)$$

קוסינוס הזווית בין x ל- y .

הוכחה: לפי משפט הקוסינוסים:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2}{2\|x\|\|y\|} \\ &= \frac{2(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)}{2\|x\|\|y\|} \quad (\text{לפי טענה הקודמת}) \\ &= \frac{x_1 y_1 + x_n y_n}{\|x\|\|y\|}\end{aligned}$$

הגדרה: לכל $x = (x_1, \dots, x_n)$ ו- $y = (y_1, \dots, y_n)$ ב- $\mathbb{R}^n$ מגדירים **המכפלה הסקלרית** (פנימית) של הם כך:

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

הערה חשובה: המכפלה הסקלרית של שני וקטורים הוא סקלר (לא וקטור).

מסקנה: אם (x, y) היא הזווית שבין x ל- y (וקטורים שונים מ-0 ב- $\mathbb{R}^n$) אז

$$\cos(x, y) = \frac{x \cdot y}{\|x\|\|y\|}$$

הערה: כתוצאה מזה ש- $-1 \leq \cos(x, y) \leq 1$ ושקול לכך ש- $|\cos(x, y)| \leq 1$ נוצר ש-

$$\left| \frac{x \cdot y}{\|x\|\|y\|} \right| \leq 1$$

כלומר ש- $|x \cdot y| \leq \|x\|\|y\|$

השוויון יתקיים כשאר $\cos = \pm 1$

כלומר כאשר הזווית בין x ל- y הוא 0° או 180° .

פירוש הדבר: $|x_1 y_1 + \dots + x_n y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}$

או שקול לך

$$(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2)$$

השוויון מתקיים אם ורק אם x, y הם על אותו ישר

כלומר קיים λ כך ש- $x_1 = \lambda y_1, \dots, x_n = \lambda y_n$ (ז"א $x = \lambda y$).

משפט: הוקטורים x, y ב- $\mathbb{R}^2$ הם מאונכים זה לזה אם"ם $x \cdot y = 0$

הסבר: אם $x, y \neq 0$ אז שוויון הנ"ל מבטיח שהזווית ב- x ל- y היא 90° .

בנוסף נוהגים לומר שהוקטור האפס הוא ניצב לכל וקטור אחר
והדרך מתיישך עם השוויון $x \cdot y = 0$ גם במקרה ש- $x=0$ או $y=0$.



$$a_1 x_1, \dots, a_n x_n = 0$$

$$(a_1, \dots, a_n)(x_1, \dots, x_n) = 0$$

שיעור 3-ב (05.11.09)

הגדרה: הגדרנו לכל $x, y \in \mathbb{R}^n$ את המכפלה הסקלרית שלהם כך:

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

תכונות של המכפלה הסקלרית

טענות: לכל $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ מתקיים:

1. חיוביות: $x \cdot x \geq 0$ ומספר $x \cdot x = 0$ אם ורק אם $x = 0 \in \mathbb{R}^n$

2. סימטריות: $x \cdot y = y \cdot x$

3. לינאריות לכל רכיב: לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$(\text{לינאריות ברכיב השמאל}) \quad (\alpha x + \beta y) \cdot z = \alpha(x \cdot z) + \beta(y \cdot z)$$

$$(\text{לינאריות ברכיב השני}) \quad x \cdot (\alpha y + \beta z) = \alpha(x \cdot y) + \beta(x \cdot z)$$

הוכחות:

1. חיוביות: אם $x = (x_1, \dots, x_n)$

$$\text{אז } x \cdot x = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0 \quad (\text{תחום של ריבועי})$$

בנוסף $x \cdot x = \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$ אם ורק אם $x_i = 0$ לכל $1 \leq i \leq n$ כלומר $x = 0$

2. סימטריות: $x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n y_i x_i = y \cdot x$ (הכפל הוקטורי הוא חילופי)

3. לינאריות לכל רכיב - חלק שני.

$$\begin{aligned}
 & \underline{x}(\alpha \underline{y} + \beta \underline{z}) \\
 &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (\alpha y_1 + \beta z_1, \alpha y_2 + \beta z_2, \dots, \alpha y_n + \beta z_n) \\
 &= \sum_{i=1}^n x_i (\underbrace{\alpha y_i + \beta z_i}_{\text{מספרים ממשיים}}) \\
 &= \sum_{i=1}^n (\alpha x_i y_i + \beta x_i z_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n \alpha x_i y_i + \sum_{i=1}^n \beta x_i z_i \\
 &= \alpha \sum_{i=1}^n x_i y_i + \beta \sum_{i=1}^n x_i z_i \quad (\text{כי אלפא ובטא קבועים לא תלויים ב-} i) \\
 &= \alpha (\underline{x} \cdot \underline{y}) + \beta (\underline{x} \cdot \underline{z})
 \end{aligned}$$

(צד שמאל להוכיח לבד)

פעולות על מטריצות

חיבור מטריצות

הגדרה: לכל שתי מטריצות A, B מאותו סדר $A = [a_{ij}]$ ו- $B = [b_{ij}]$ $1 \leq i \leq m$ $1 \leq j \leq n$ מגדירים את הסכום שלהם כך:

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$$

הערות: (1) אפשר לחבר רק מטריצות מאותו סדר.
(2) תוצאת החיבור של שתי מטריצות הוא שוב מטריצה מאותו בסדר.

דוגמאות: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \end{bmatrix}$
לכן חיבור וקטורים הוא מקרה פטרי של חיבור מטריצות.

$$[1 \ 2] + \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \text{אי אפשר}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

כפל מטריצות בסקלר

הגדרה: לכל מטריצה $A=[a_{ij}]$ ולכל סקלר λ מגדירים הכפל של A ב- λ כך:

$$\lambda A = [\lambda a_{ij}]$$

הערות: (1) הכפל הנ"ל מוגדר לכל מטריצה ולכל סקלר.
(2) תוצאת הכפל של מטריצה בסקלר היא מטריצה מאותו סדר.

תכונות החיבור והכפל בסקלר של מטריצות

לכל שלוש מטריצות A, B, C שהן מאותו סדר ולכל $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ מתקיים:

1. חילופיות: $A + B = B + A$
2. קיבוציות: $(A + B) + C = A + (B + C)$ (אסוציאטיביות)
3. מטריצת ה-0: $A + \underline{0} = \underline{0} + A = A$ ($\underline{0}$ הוא מטריצת האפס מאותו סדר)
4. סקלר נגדי: $A + (-1)A = \underline{0}$ (בהמשך נסמן $-A = (-1)A$)
5. סקלר נטרלי: $1 \cdot A = A$
6. 0 (מטריצה) $\cdot A = \underline{0}$ (מספר)
7. פילוג: $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ (דיסטריבוטיביות)
8. פילוג: $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ (דיסטריבוטיביות)
9. $(\lambda \mu)A = \lambda(\mu A)$

כפל מטריצות

הגדרה: כפל בין וקטור שורה לוקטור עמודה.

$$\underbrace{[x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]}_{(1 \times n) \text{ מטריצה מסדר}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}}_{(n \times 1)} = [x_1 y_1 + \dots + x_n y_n]$$

מטריצת מסדר (1×1) (סקלר)

הערה: (לפני הגדרת הכפל בין מטריצה ולבין וקטור עמודה)

לדוגמה, נניח שמדרגים את המטריצה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{-3R_1 + R_2 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -3 & -11 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

נשים לב לתופעה הבאה:

$$[1 \ 0 \ 0] + \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 5 \quad (1)$$

$$[-3 \ 1 \ 0] + \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = -11 \quad (2)$$

$$[0 \ 0 \ 1] + \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \quad (3)$$

לכן נצרף את הכל ונכתוב כך:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -11 \\ 3 \end{bmatrix}$$

הגדרה: כפל של מטריצה בוקטור עמודה

לכל מטריצה A מסדר $(m \times n)$ ולכל וקטור עמודה $\underline{x}$ מסדר $(n \times 1)$, מגדירים:

$$\underbrace{A}_{(m \times n)} \cdot \underbrace{\underline{x}}_{(n \times 1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{a}_1 \cdot \underline{x} \\ \vdots \\ \underline{a}_m \cdot \underline{x} \end{bmatrix}}_{(m \times 1)}$$

כאשר $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m$ הן השורות של A .

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}}_{(2 \times 3)} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{(3 \times 1)} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \end{bmatrix} \quad \text{דוגמה:}$$

הערה חשובה ביותר: שימו לב בדוגמה הקודמת.

הרכיבים של הוקטור מימין

$$\begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 3x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

עמודות המטריצה משמאל

תוצאת הכפל הוא וקטור שהוא צירוף לינאריות של עמודות A כשאר המקדמים הם הרכיבים של $\underline{x}$.

$$\underbrace{A}_{\text{מטריצה}} \cdot \underbrace{\underline{x}}_{\text{וקטור עמודה}}$$

דוגמה:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}}_{(3 \times 2)} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{(2 \times 1)} \underset{\text{לפי ההגדרה}}{=} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

לפי הערה הקודמת.

$$\begin{matrix} A_1 & A_2 \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \uparrow \\ x_1 A_1 \end{matrix} + \begin{matrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \\ \uparrow \\ x_2 A_2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

מסקנה:

$$\underbrace{A}_{(m \times n)} \underbrace{x}_{(n \times 1)} = \begin{bmatrix} a_1 \cdot x \\ \vdots \\ a_m \cdot x \end{bmatrix} = x_1 A_1 + \dots + x_n A_n$$

כאשר $a_1, \dots, a_m$ הן שורות של A
 $A_1, \dots, A_n$ הן העמודות של A

הקשר בין מערכת משוואות לינאריות לבין כפל מטריצות

בניח שנתונה המערכת:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

נסמן:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

אז במערכת

$$\begin{cases} \underline{a}_1 \cdot \underline{x} = b_1 \\ \underline{a}_m \cdot \underline{x} = b_m \end{cases}$$

כאשר $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m$ הן השורות של A . או בעצם:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{a}_1 \cdot \underline{x} \\ \vdots \\ \underline{a}_m \cdot \underline{x} \end{bmatrix}}_{A\underline{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\underline{b}}$$

כלומר $A\underline{x} = \underline{b}$

שיעור 4-א (10.11.09)

ראינו שאם A מטריצה מסדר $(m \times n)$ ו- $\underline{x}$ וקטור מסדר $(1 \times n)$ אז

כאשר:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{שורות } A \\ \text{עמודות } A \end{array} \quad \begin{array}{l} a_1, \dots, a_m \\ A_1, \dots, A_n \end{array}$$

$$\underbrace{\underline{A}}_{(m \times n)} \underbrace{\underline{x}}_{(n \times 1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \cdot x \\ \vdots \\ a_n \cdot x \end{bmatrix}}_{(m \times 1)} = x_1 A_1 + \dots + x_n A_n$$

דוגמה:

לפי

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 x + b_1 y \\ a_2 x + b_2 y \\ a_3 x + b_3 y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

תכונות הכפל של מטריצה בוקטור עמודה

משפט: נניח ש- A, B מטריצות מסדר $(m \times n)$ ו- $\underline{x}, \underline{y}$ וקטורים $(n \times 1)$ אז:

$$1. \quad A(\underline{x} + \underline{y}) = A\underline{x} + A\underline{y}$$

$$2. \quad (A + B)\underline{x} = A\underline{x} + B\underline{x}$$

$$3. \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad A(\lambda \underline{x}) = \lambda(A\underline{x}) = (\lambda A)\underline{x}$$

הוכחה:

$$1. \quad \text{הוכחת } A(\underline{x} + \underline{y}) = A\underline{x} + A\underline{y}$$

נסמן $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ ו- $\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$

חיבור וקטורים
וכפל וקטורים
בסקלר

$$A(\underline{x} + \underline{y}) = A \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} = (x_1 + y_1) A_1 + \dots + (x_n + y_n) A_n$$

עמודות A

$$= (x_1 A_1 + \dots + x_n A_n) + (y_1 A_1 + \dots + y_n A_n) = A\underline{x} + A\underline{y}$$

2. **הוכחת** $(A+B)\underline{x} = A\underline{x} + B\underline{x}$

עמודות A+B

$(A+B)_1 = A_1 + B_1$

לפי ההגדרה של חיבור מטריצות

$$\begin{aligned} (A+B)\underline{x} &= x_1(A+B)_1 + x_2(A+B)_2 + \dots + x_n(A+B)_n \\ &= x_1(A_1 + B_1) + \dots + x_n(A_n + B_n) \\ &= (x_1 A_1 + \dots + x_n A_n) + (x_1 B_1 + \dots + x_n B_n) \\ &= A\underline{x} + B\underline{x} \end{aligned}$$

3. **הוכחת** $A(\lambda \underline{x}) = \lambda(A\underline{x}) = (\lambda A)\underline{x}$

$(\lambda A)_1 = \lambda A_1$

לפי ההגדרה של כפל מטריצה במספר

$$\begin{aligned} (\lambda A)\underline{x} &= x_1(\lambda A)_1 + \dots + x_n(\lambda A)_n \\ &= x_1(\lambda A_1) + \dots + x_n(\lambda A_n) \\ &= (x_1 \lambda) A_1 + \dots + (x_n \lambda) A_n \\ &= (x_1 A_1 + \dots + x_n A_n) \lambda \\ &= \lambda(A\underline{x}) \end{aligned}$$

שימוש במערכת משוואות

הקדמה: ראינו שמערכת משוואות לינארית ב-n נעלמים ו-m משוואות אפשר תמיד לרשום:

$$\underbrace{A}_{(m \times n)} \underbrace{\underline{x}}_{(n \times 1)} = \underbrace{\underline{b}}_{(m \times 1)}$$

הערה: $\underline{x}$ פתרון למערכת הנ"ל אם $A\underline{x} = \underline{b}$ כלומר $x_1 A_1 + \dots + x_n A_n = \underline{b}$

מסקנה חשובה: למערכת $A\underline{x} = \underline{b}$ יש פתרון אם"ם אפשר להביע את $\underline{b}$ בצירוף לינארית של עמודות A.

למשל למערכת:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 = -2 \\ 4x_1 + 2x_2 = 2 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ 10x_1 - 11x_2 = 21 \end{cases}$$

יש פתרון, כי $(1) \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \\ 10 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \\ -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \\ 21 \end{bmatrix}$

תרגיל:

להוכיח שאם $\underline{x}$ ו- $\underline{y}$ פתרונות למערכת $A\underline{x}=\underline{b}$
אז לכל $\lambda \in \mathbb{R}$ גם $\lambda \underline{x} + (1-\lambda)\underline{y}$ פתרון.

פתרון:

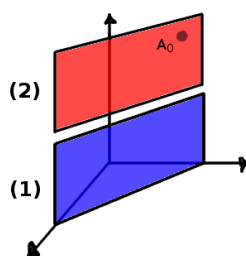
$$\begin{aligned} A(\lambda \underline{x} + (1-\lambda)\underline{y}) &= A(\lambda \underline{x}) + A((1-\lambda)\underline{y}) \\ &= \lambda \underbrace{A\underline{x}}_{=\underline{b}} + (1-\lambda) \underbrace{A\underline{y}}_{=\underline{b}} \\ &= \lambda \underline{b} + (1-\lambda)\underline{b} \\ &= (\lambda + 1 - \lambda)\underline{b} = \underline{b} \end{aligned}$$

כך $\underline{x}, \underline{y}$ פתרונות למערכת

לכן גם $\lambda \underline{x} + (1-\lambda)\underline{y}$ פתרון למערכת.

טענה:

(הקשר בין קבוצות הפתרונות של המערכות $A\underline{x}=\underline{b}$ ו- $A\underline{x}=\underline{0}$)



(1) מישור דרך 0,
קבוצת הפתרונות של $A\underline{x}=\underline{0}$

(2) מישור מקביל דרך $\underline{x}_0$ (שהוא פתרון למשוואה)
והמישור קבוצת כל הפתרונות של $A\underline{x}=\underline{b}$

נסמן ב- k את קבוצת הפתרונות של המערכת $A\underline{x}=\underline{0}$

אם $\underline{x}_0$ פתרון אחד (פרטי) של המערכת $A\underline{x}=\underline{b}$ אז קבוצת הפתרונות של המערכת הלא הומוגנית $A\underline{x}=\underline{b}$ היא $\{\underline{x}_0 + \underline{x} \mid \underline{x} \in K\}$.

$$\begin{aligned} A(\underline{x}_0 + \underline{x}) \\ A\underline{x}_0 + A\underline{x} = \underline{b} \end{aligned}$$

כפל מטריצות

הסבר: הסיבה להגדרת כפל מטריצה בוקטור בצורה שבחרנו היתה ביצוע פעולות אלמנטריות על וטטור עמודה.

דוגמה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{-3R_1 + R_2 \rightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

הפעולות שעשינו על העמודה $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ היא בעצם $\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

במילים אחרות, כפל של וקטור משמאל במטריצה $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

שקול לפעולה $-3R_1 + R_2 \rightarrow R_2$ על אותה וקטור עמודה.

נשים לב שבמהלך הדירוג, אותה פעולה נעשית על כל אחת מן העמודות של המטריצה A. לכן, אם נסמן:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

התוצאה של פעולות האלמנטריות $-3R_1 + R_2 \rightarrow R_2$ על $[A | \underline{b}]$ היא

$$[EA_1, EA_2, EA_3 | E\underline{b}]$$

לכן כדאי שנגדיר גם את ההכפלה EA במטריצה $[EA_1, EA_2, EA_3]$.

הגדרה: נניח ש-A מטריצה מסדר $(m \times k)$ ו-B מטריצה מבסדר $(k \times n)$. מגדירים מטריצה כפולה כך:

$$\underbrace{A}_{(m \times k)} \underbrace{B}_{(k \times n)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{AB_1}_{(m \times 1)} & \underbrace{AB_2}_{(m \times 1)} & \underbrace{AB_3}_{(m \times 1)} \end{bmatrix}}_{(m \times n) \text{ מטריצה}}$$

דוגמה:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}}_{(3 \times 3)} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & y_2 \\ x_1 & y_2 \\ x_1 & y_2 \end{bmatrix}}_{(3 \times 2)} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 & a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 & b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 \\ c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 & c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 \end{bmatrix}}_{(3 \times 2)}$$

מבט אחר על כפל מטריצות

מאחר שאם $\underline{A}$ מטריצה ששורותיה $a_1, a_2, \dots, a_m$ אז $\underline{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$ $(m \times k)$

$$\underline{AB}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \cdot b_1 \\ \vdots \\ a_m \cdot b_1 \end{bmatrix}$$

וקטור עמודה

$$\underline{A} \underline{B} = [\underline{AB}_1 \quad \dots \quad \underline{AB}_n] = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m b_1 & a_m b_2 & \dots & a_m b_n \end{bmatrix}$$

$(m \times k)(k \times n)$

מסקנה אם A מטריצה $(m \times k)$ ו- B מטריצה $(k \times n)$ אז AB מטריצה $(m \times n)$
חשובה: והאיבר במקום (i, j) בה היא

$$(\underline{AB})_{ij} = \underbrace{a_i}_{\text{שורה } i \text{ של } A} \cdot \underbrace{b_j}_{\text{עמודה } j \text{ של } B} = \sum_{l=1}^k \underbrace{a_{il}}_{\text{אברי שורה } i \text{ של } A} + \underbrace{b_{il}}_{\text{אברי עמודה } j \text{ של } B}$$

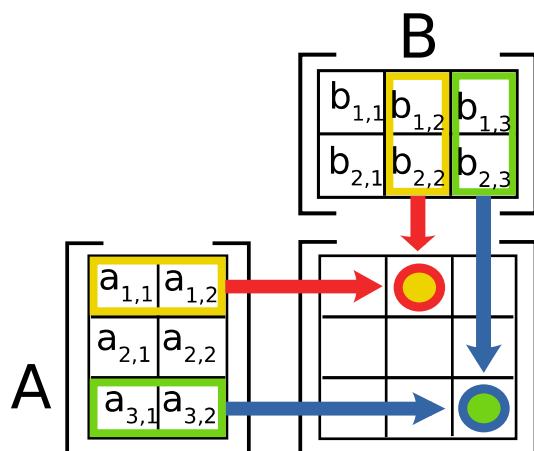
סימון לאיבר ij במטריצה AB

$$a_i b_j = \underbrace{[a_{i1} \quad \dots \quad a_{ik}]}_{\text{שורה } i \text{ של } A} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{kj} \end{bmatrix} = \sum_{l=1}^k a_{il} \cdot b_{jl}$$

עמודה j של B

דוגמאות:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{(2 \times 3)} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{(3 \times 2)} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [4]$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$(3 \times 1) \quad (1 \times 3) \quad (3 \times 3)$

* הדיאגרמה מ-http://en.wikipedia.org/wiki/Matrix_multiplication

תכונות של כפל מטריצות

משפט:

לכל שלוש מטריצות A, B, C שעבורן
הביטויים שלהן מוגדרים ולכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$A(B+C) = AB + AC \quad .1$$

$$(A+B)C = AC + BC \quad .2$$

$$A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB) \quad .3$$

הוכחה:

$$A(B+C) = AB + AC \quad \text{הוכחת } .1$$

העמודה i של $\underbrace{A}_{(m \times k)} \left(\underbrace{B}_{(k \times n)} + \underbrace{C}_{(k \times n)} \right)$

$$\begin{aligned} (AB)_i &= A(B_i) \\ \text{עמודה של } AB & \text{ היא } A \cdot B_i \\ [A(B+C)]_i &= A(B+C)_i \\ &= A(\underbrace{B_i + C_i}_{\text{וקטור עמודה}}) \\ &= \underbrace{AB_i}_{\text{עמודה } i \text{ של } AB} + \underbrace{AC_i}_{\text{עמודה } i \text{ של } AC} \\ &= (AB)_i + (AC)_i = (AB + AC)_i \end{aligned}$$

$$(A+B)C = AC + BC \quad \text{הוכחת } .2$$

עוד לא.

$$A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB) \quad \text{הוכחת } .3$$

$$[A(\lambda B)]_i = A(\lambda B)_i = \lambda \underbrace{(AB)_i}_{\text{עמודה } i \text{ של } AB} = \lambda(AB)_i$$

התכונות של כפל מטריצה בוקטור עמודה

לכן ל- $A(\lambda B)$ ול- $\lambda(AB)$ יש אותה עמודה i לכל i ולכן

$$\lambda(AB) = A(\lambda B)$$

שיעור 4-ב (12.11.09)

כפל מטריצות - המשך

אם $\underline{A}_{m \times k: a_{ij}}$, $\underline{B}_{k \times n: b_{ji}}$ הגדרנו את AB כמטריצה מסדר $(m \times n)$ שאיבריה $(AB)_{il} = \sum a_{ij} b_{jl}$

(האיבר il של AB היא המכפלה של שורה i של A בעמודה j של B)

כמובן ראינו ש- $(AB)_l = \underline{AB}_l$:
 המכפלה של A בעמודה l של B עמודה l של AB

$(AB)_{il}$ - האיבר ij של המטריצה AB .

$(AB)_i$ - עמודה i של AB .

$\underline{A}_{m \times k: a_{ij}}$, $\underline{B}_{k \times n: b_{ji}}$, $\underline{C}_{n \times p: c_{pi}}$

משפט: קיבוציות של כפל במטריצות. אם

$$\underbrace{(AB)C}_{(m \times n)(n \times p)} = \underbrace{A(BC)}_{(m \times k)(k \times p)} \quad \text{אז} \quad \underbrace{(m \times p)}_{(m \times p)}$$

הוכחה: נראה תחילה שאם x וקטור מסדר $(n \times 1)$ אז $(AB)x = A(Bx)$.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{נרשום}$$

$$(AB)x = \underbrace{x_1(AB)_1}_{\text{עמודה 1 של } AB \text{ (לפי סימון)}} + \underbrace{x_2(AB)_2}_{\text{עמודה 2 של } AB} + \cdots + \underbrace{x_n(AB)_n}_{\text{עמודה } n \text{ של } AB}$$

כך נראת העמודה 1 של A לפי הגדרת הכפל של מטריצה בוקטור עמודה

$$= x_1(AB_1) + x_2(AB_2) + \cdots + x_n(AB_n) \quad \text{עמודה } n \text{ של } AB$$

$$= A \underbrace{(x_1 B_1)}_{\text{תכונות של כפל מטריצה}} + A(x_2 B_2) + \cdots + A(x_n B_n)$$

$$= A \underbrace{(x_1 B_1 + \cdots + x_n B_n)}_{\text{זה שווה ל- } Bx} = A(Bx)$$

נעבור למקרה כללי

$$(AB)C = A(BC) \text{ - צ"ל ש-}$$

מספיק להראות שלשתי המטריות הנ"ל יש אותן העמודות. אלה מטריות מסדר $(m \times p)$. לשתיהן יש p עמודות. לכל $n \leq t \leq p$ מתקיים

$$\begin{array}{ccccccc} & & \text{וקטור עמודה} & \text{הוכחנו קודם} & \text{לפי ההגדרה ש כפל מטריות} & & \\ & & \nearrow & \nearrow & \nearrow & & \\ [(AB)_c]_t & = & (AB) \overbrace{C_t} & = A \underbrace{(BC)_t} & = A \underbrace{(BC)_t} & = \underbrace{[A(BC)]_t} & \\ \text{עמודה } t \text{ של } A(BC) & & \text{לפי ההגדרה של כפל מטריות} & \text{עמודה } t \text{ של } BC & \text{עמודה } t \text{ של } BC & \text{עמודה } t \text{ של } A(BC) & \end{array}$$

לכל מטרצה $(AB)C$ ו- $A(BC)$ יש אותן העמודות ולכן $A(BC) = (AB)C$.

דוגמה:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 9 \\ 9 & -13 & 24 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 9 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 9 \\ 9 & -13 & 24 \end{bmatrix}$$

הערה 1: אם $A = (a_{ij})$ מטרצה מסדר $(m \times n)$

$$S_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \text{ אז סכום האיברים בשורה } i \text{ הוא}$$

$$\sum_{i=1}^m S_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \text{ לכן סכום איברי המטרצה}$$

$$T_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} \text{ מצרתי סכום איברי עמודה } j \text{ הוא}$$

$$S = \sum_{i=1}^m T_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} \text{ ולכן}$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \text{ מסקנה:}$$

$$\frac{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} S_1 \\ \vdots \\ S_m \end{matrix}}{T_1 + \cdots + T_n} S$$

הערה 2:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc} \underline{A} & \underline{B} \\ m \times k : a_{ij} & k \times n : b_{jl} \end{array} \right) \underline{C} & \quad n \times p : c_{it} \\ [(AB)C]_{it} &= \sum_{l=1}^n (\underline{AB})_{il} \cdot \underline{C}_{lt} = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{j=1}^k a_{ij} \cdot \underline{b}_{jl} \right) \underline{C}_{lt} \\ & \quad \text{עמודה } l \text{ של } C \quad \text{שורה } i \text{ של } AB \quad \text{לא תלוי ב-} j \quad \text{איבר } il \text{ של } AB \\ &= \sum_{l=1}^n \left(\sum_{j=1}^k a_{ij} b_{jl} c_{lt} \right) = \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^n a_{ij} b_{jl} c_{lt} \\ &= \sum_{l=1}^k a_{ij} \sum_{l=1}^n b_{jl} c_{lt} = \sum_{l=1}^k a_{ij} (BC)_{jl} = [A(BC)]_i \end{aligned}$$

לכן לכל i, t האיבר במקום it של $(AB)C$ שווה לאיבר במקום it של $A(BC)$.
לכן $(AB)C = A(BC)$

הגדרה: אם A מטריצה מסדר $(m \times n)$ מגדירים $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{k \text{ פעמים}}$

$$A^3 = \underbrace{(AA)}_B A = BA - A \underbrace{(AA)}_B = AB$$

זכות קיבוציות אין חשיבות לסדר בתוכת הסוגריים.

המטריצה A^t (משוחלפת / Transpose)

<http://en.wikipedia.org/wiki/Transpose>

(שחלוף) (מתמטיקה) <http://he.wikipedia.org/wiki/Transpose>

הגדרה: אם $A = a_{ij}$ מטריצה מסדר $(m \times n)$

אז $A^t = a_{ji}$ מטריצה מסדר $(n \times m)$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^t &= \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \quad (2) \\ \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}^t &= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad (1) \end{aligned}$$

דוגמאות:

הגדרה: מטריצה A נקראת **סימטרית** אם $A = A^t$
(נובע מכאן שרק מטריצה ריבועית יכולה להיות סימטרית)

משפט: לכל שתי מטריצות $\underline{A} \quad \underline{B} \quad \underline{C}$ מתקיים:

$$(\lambda A)^t = \lambda A^t \quad 3. \quad (A^t)^t = A \quad 1.$$

$$(AB)^t = B^t A^t \quad 4. \quad (A+C)^t = A^t + C^t \quad 2.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{דוגמה:}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (AB)^t = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad B^t A^t = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

הערות: מהגדרת A^t נובע שאם נתון ב- a_{ji}^t את האיבר במקום ji של A^t אז $a_{ji}^t = a_{ij}$. לכן:

$$\underbrace{[(AB)^t]_{li}}_{\text{האיבר li של } (AB)^t} = (AB)_{il} = \sum_{j=1}^k a_{ij} b_{jl} = \sum_{j=1}^k \underbrace{b_{lj}^t}_{\text{איבר } lj \text{ ב- } B^t} \underbrace{a_{jl}^t}_{\text{איבר } ji \text{ ב- } A^t} = (B^t A^t)_{li}$$

$$\underbrace{A}_{m \times k : a_{ij}} \quad \underbrace{B}_{k \times n : b_{jl}} \quad \underbrace{A \cdot B}_{m \times n} \quad \underbrace{(AB)^t}_{n \times m} \quad \text{כאשר}$$

מטריצה הפוכית

הערה: ראינו שמערכת לינארית אפשר לרשום $A\underline{x} = \underline{b}$

משוואה דומה, במספרים ממשיים כמו $ax = b$ כאשר $a \neq 0$ פותרים ע"י חילוק ב- a ($x = \frac{b}{a}$ - פתרון יחיד) למשל: $2x = 3$. נכפל ב- $\frac{1}{2}$ ונקבל ש- $x = \frac{3}{2}$.

(מטריצה שלא משפיע בכפל)

מטריצה היחידה (Identity Matrix)

http://en.wikipedia.org/wiki/Identity_matrix

[http://he.wikipedia.org/wiki/מטריצת היחידה](http://he.wikipedia.org/wiki/מטריצת_היחידה)

הגדרה: לכל n טבעי מסומנים

$$I_n = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}}_{(n \times n)}$$

דוגמאות:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I_3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

טענה: נניח ש- A מטריצה מסדר (ij) ($m \times n$) אז

$$A \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow j = \begin{bmatrix} a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{(1 \times m)} A = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}}_{\text{שורה } i \text{ של } A}$$

עמודה j של A

משפט: אם A מטריצה מסדר $(m \times n)$ אז $I_m A = A I_n = A$

הסבר: תוצאה מן הטענה הקודמת.

הערה: כדי לפתור את המערכת

$$\underbrace{A}_{(m \times n)} \underbrace{x}_{(n \times 1)} = \underbrace{b}_{(m \times 1)}$$

מספיק למצוא מטריצה C כך ש- $\underbrace{C}_{(n \times k)} \underbrace{A}_{(m \times n)} = I_n$

אם נצליח, אז $C(Ax) = Cb$ ולכן $(CA)x = Cb$ (קיבוציות הכפל)
 $I_n x = Cb$
 $x = Cb$ - יש פתרון יחיד למערכת.

שיעור 5-א (17.11.09)

מטריצה הפיכה (Invertible matrix)

http://en.wikipedia.org/wiki/Invertible_matrix

http://he.wikipedia.org/wiki/מטריצה_הפיכה

הגדרה: נאמר שמטריצה A מסדר $(n \times n)$ היא **הפיכה** (או **רגולרית**)

אם קיימת מטריצה C מסדר $(n \times n)$ כך ש- $AC = CA = I_n$

נאמר אז ש- C הופכית ל- A . (C is the inverse of A)

הערה: אם A, B, C מטריצות ואם $AB = AC$ לא מובטח ש- $B = C$.

למשל:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

הערה: השוויון $AB = 0$ לא מבטיח ש- $A = 0$ או $B = 0$.

למשל:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

משפט: אם A מטריצה **הפיכה** אז יש לה **הופכית אחת** ויחידה.

הוכחה: לפי ההנחה, קיימת מטריצה ריבועית C מאותו סדר כמו A כך ש- $AC = CA = I$.

נניח שגם C' הופכית ל- A . כלומר $AC' = C'A = I$.

אז $C' = C'I = C'(AC) = (C'A)C = I \cdot C = C$ נתון
קיבוציות כפל מטריצה

לכן ל- A יש הופכית יחידה.

סימון: מאחר שאם A הפיכה, יש לה הופכית יחידה בלבד,

מותר לסמן אותו בסימון מיוחד והוא A^{-1} .

הערה: למה לא מחלקים מטריצות?

אומנם לסימון $\frac{I}{A}$ אפשר לייחס פירוש אחד - A^{-1} (בתנאי ש- A הפיכה).

אבל לסימון $\frac{B}{A}$ יש שני פירושים שווים:

$B \cdot A^{-1}$ או $A^{-1} \cdot B$, ששניהן מטריצות שונות.

טענה: מותר לצמצם במטריצה הפיכה: אם A הפיכה ו- $AB=AC$ אז $B=C$
 אם A הפיכה ו- $BA=CA$ אז $B=C$ (B,C לא חייבים להיות ריבועיות).

הערה: אי אפשר לצמצם ב-A שוויון כמו $AB=CA$.

הוכחה: אם $AB=AC$ אז

$$A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC)$$
 (קיבוציות) $(A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C$
 $IB = IC$ לכן
 $B = C$ ולכן

טענה: אם $AB=0$ ו-A הפיכה אז $B=0$.

הוכחה:

$$A^{-1}(AB) = A^{-1}0$$
 (מהנתון)
 $(A^{-1}A)B = 0$
 $IB = 0$
 $B = 0$

הערה: מטריצה ה-0 מסדר (nxn) לא הפיכה כי לכל C $0 \cdot C = C \cdot 0 = 0$.
 (לא ייתכן ש- $0 \cdot C = I$)

משפט: נניח ש-A, B מטריצות הפוכיות מסדר (nxn) אזי

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ הפיכה ו-AB
3. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ הפיכה ו-A'

הוכחה 1: $(A^{-1})^{-1} = A$

אם A הפיכה אז $A^{-1}(A) = (A)A^{-1}$
 נובע מכאן ש- A^{-1} ו-A הופכית לה.
 לכן $(A^{-1})^{-1} = A$
 (ההופכית של A^{-1} היא A)

הוכחת 2: AB הפיכה ו- $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

A, B הפיכות, ולכן קיימת A^{-1}, B^{-1} אז

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) \underset{\text{קיבוציות}}{=} A(BB^{-1})A^{-1} = (AI)A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

כנ"ל $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$.

לכן מטריצה AB הפיכה ו- $B^{-1} \cdot A^{-1}$ הופכית לה.
 לכן מיחדות ההופכיות נובע ש- $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

הוכחת 3: A' הפיכה ו- $(A')^{-1} = (A^{-1})'$

אם A הפוכה אז קיימת A^{-1} כך ש-

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$$

לכן $(A^{-1} \cdot A)^t = (A \cdot A^{-1})^t = I^t$
 (משפט קודם: $(AB)^t = B^t A^t$)
 $\underline{A'}(A^{-1})^t = (A^t)^t \underline{A'} = I$

לכן A' הפיכה ו- $(A^{-1})^t$ הופכית לה.
 לכן מיחידות ההופכיות נובע ש- $(A')^{-1} = (A^{-1})^t$

דוגמאות של מטריצות הפיכות

0. I_n הפיכה לכל n. (ההופכית שלה זו היא עצמה).

1. המטריצות "האלמנטריות" המתאימות לפעולות של הוספת כפולה של שורה מטריצה לשורה אחרת.

דוגמה: $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ אם כופלים משמאל מטריצה A במטריצה B

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + \lambda a_1 & b_2 + \lambda a_2 & b_3 + \lambda a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

מקבלים מטריצה חדשה שהוא תוצאה של פעולה אלמנטריות על שורות A.
 (הוספת הפולה של שורה I ב-λ לשורה II).

באופן כללי אם נסמן ב- E_{ij} את המטריצה מסדר (חאח) שכולה אפסים למעט המקום ij שבו מופיע 1, אז המטריצה המייצגת את הפעולה האלמנטרית של הוספת כפולה ב- λ של שורה j לשורה i היא $I + \lambda E_{ij}$

$$E_{12} \cdot E_{12} = 0 \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{12}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{21}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{11}} \quad E_{ij} E_{kl} = \begin{cases} E_{il} & k=j \text{ אם} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad \text{טענה:}$$

משפט: $I + \lambda E_{ij}$ היא הפיכה ו- $(I + \lambda E_{ij})^{-1} = I - \lambda E_{ij}$.

$$\begin{aligned} & (I + \lambda E_{ij})(I - \lambda E_{ij}) \\ &= I(I - \lambda E_{ij}) + \lambda E_{ij}(I - \lambda E_{ij}) = I - \lambda E_{ij} + \lambda E_{ij} - \lambda^2 \underbrace{E_{ij} E_{ij}}_0 = I \end{aligned} \quad \text{הוכחה:}$$

באופן דומה: $(I - \lambda E_{ij})(I + \lambda E_{ij})$
 לכן $I + \lambda E_{ij}$ הפיכה ו- $(I + \lambda E_{ij})^{-1} = I - \lambda E_{ij}$

2. מטריצות אלמנטריות המייצגות כפל של שורה בסקלר שונה מ-0.

$$i \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{המטריצה}$$

שבה $\lambda \neq 0$, מתאימה לפעולות מן הסוג הנ"ל כי הכפל משמאל של מטריצה A במטריצה הנ"ל מוביל לכפל ב- λ של שורה i של A (כל שאר השורות לא משתנות).

טענה: כל מטריצה C_λ היא הפוכה ו- $C_\lambda^{-1} = C_{\frac{1}{\lambda}}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I \quad \text{הוכחה:}$$

בכל מקום שונה מ- ij מופיע 1.

$$C_\lambda^{-1} = C_{\frac{1}{\lambda}} \quad \text{וכן } C_\lambda \cdot C_{\frac{1}{\lambda}} = I \quad \text{כנ"ל}$$

3. המטריצה האלמנטרית המתאימה להחלפת שורות i ו-j היא

$$P_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix}$$

$$P_{ij} = \left(\sum_{k \neq i, j} E_{kk} \right) + E_{ij} + E_{ji}$$

$$P_{ij} \cdot P_{ij} = I \quad \text{אז}$$

$$(P_{ij})^{-1} = P_{ij} \quad \text{לכן}$$

משפט: כל מכפלה של מטריצות אלמנטריות היא מטריצה הפיכה.

הוכחה: ראינו קודם שכל מטריצה אלמנטרית היא הפוכה.
לפניכן הוכחנו שמכפלה של מטריצה הפוכית היא מטריצה הפיכה.

הערה: $(ABC)^{-1} = C^{-1} \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}$

טענה: אם למערכת משוואות $\underbrace{A}_{(m \times n)} \underbrace{x}_{(n \times 1)} = \underbrace{b}_{(m \times 1)}$ יש פתרון יחיד

אז קיימת מטריצה הפיכה P כך ש-

$$PA = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{(n \times m)}$$

(ב-PA יש n איברים פותחים כלומר מופיע איבר פותח בכל עמודה).

שיעור 5-ב (19.11.09)

$$PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הערה: אם למערכת $\underbrace{A}_{(m \times n)} \underbrace{x}_{(n \times 1)} = \underbrace{b}_{(m \times 1)}$ ב-n נעלמים, יש פתרון יחיד

אז קיימת מטריצה הפיכה P כך ש-PA שווה למטריצה בצד וכאשר ב-PA יש n איברים פותחים.

הסבר: זו תוצאה של צירוף המטריצה A (אם יש פחות איברים פותחים אז למערכת יש אינסוף פתרונות או אין פתרון כלל).

ראינו שכל פעולה במהלך הדירוג של A מתבטאת בכפל משמאל של A במטריצה אלמנטרית. סימנו ב-P את מכפלת כל המטריצות האלמנטריות שבהן כפלנו משמאל במהלך הדירוג.

$$\underbrace{P_1, P_2, \dots, P_k}_P = PA = \begin{pmatrix} I_n \\ 0_{(m-n) \times n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הערה חשובה: אם למערכת $Ax=b$ יש פתרון יחיד כאשר A מסדר (מחמ) אזי $m \geq n$ (יש n איברים פותחים ב-m שורות, לכן מספר שורות הוא $n \leq$).

טענה: מטריצה לא ריבועית אינה יכולה להיות הפיכה.

הוכחה: A מטריצה מסדר (מחמ). נניח שקיימת מטריצה (מחמ) כך ש-

$$\underbrace{A}_{(m \times n)} \underbrace{B}_{(n \times m)} = I_m, \quad \underbrace{B}_{(m \times n)} \underbrace{A}_{(m \times n)} = I_n$$

אבל אז למערכת $Ax=0$ יש פתרון יחיד. (כי אם $\underbrace{A}_{(n \times 1)} \underbrace{x}_{(m \times 1)} = \underbrace{0}_{(n \times 1)}$)

אז $B(Ax)=B0$, כלומר $\underbrace{(BA)}_{I_n} x=0$ ולכן $I_n x=0$ ולכן $x=0$.

כלומר $x=0$ הפתרון יחיד למערכת $Ax=0$.

לפי הטענה הקודמת, אז למערכת $Ax=0$ יש פתרון יחיד אז $m \geq n$.

מצד שני מתקיים גם $AB=I_m$ לכן כמו קודם למערכת $Bx=0$ יש פתרון יחיד והוא $x=0$. ולכן לפי אותה טענה $n \leq m$. לכן $m=n$ ולכן A ריבועית.

משפט:

נניח ש-A מטריצה מסדר (n×n).

1. אם קיימת מטריצה C כך ש- $AC=I$ אז A הפיכה ו- $A^{-1}=C$.
2. אם קיימת מטריצה C כך ש- $CA=I$ אז A הפיכה ו- $A^{-1}=C$.

הוכחת ב':

אם קיימת C כך ש- $CA=I$ אז למערכת $A\vec{x}=\vec{0}$ יש פתרון יחיד.
 (אם $A\vec{x}=\vec{0}$ אז $A\vec{x}=I\cdot\vec{0}$ לכן $\underbrace{(CA)}_I\vec{x}=\vec{0}$ כלומר $\vec{x}=\vec{0}$.)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{(n \times n)}$$

לכן כאשר נדרג את A נגיע למטריצה A מסדר (n×n) וחייבים להיות מ איברים פתוחים.

מכאן שקיימת מטריצה הפוכה P כך ש- $PA=I$. מאחר ש-P הפיכה, קיימת מטריצה P^{-1} כך ש- $P^{-1}P=PP^{-1}=I$.

$$\begin{aligned} (P^{-1}P)A &= P^{-1}I \\ I \cdot A &= P^{-1} \quad \text{לכן מתוך } PA=I \text{ נקבל } P^{-1}(PA)=P^{-1}I \\ A &= P^{-1} \end{aligned}$$

לכן $AP=PA$ לכן A הפיכה ו- $A^{-1}=P$.

$$\begin{aligned} C \cdot I &= P \\ C &= P \\ C &= A^{-1} \end{aligned}$$

כמוכן מתוך $CA=I$ נקבל ש- $(CA)P=C(\underbrace{AP}_I)=P$. לכן $C=A^{-1}$.

הוכחת א':

נניח ש- $AC=I$. לפי ב' נקבל ש-C הפיכה ו- $C^{-1}=A$.
 לכן מתוך $CC^{-1}=C^{-1}C=I$ נובע ש- $AC=CA=I$ לכן A הפיכה ו- $A^{-1}=C$.

משפט:

נניח ש-A מטריצה מסדר (n×n).

1. A הפיכה אם"ם למערכת $A\vec{x}=\vec{b}$ (עבור וקטור כלשהו $\vec{b}$) יש פתרון יחיד (מדובר במטריצה ריבועית).
2. A הפיכה אם"ם לכל וקטור $\vec{b}$ יש פתרון למערכת $A\vec{x}=\vec{b}$.

הוכחת א':

נניח שלמערכת $A\vec{x}=\vec{b}$ (עבור b מסוים) יש פתרון יחיד.
 לכן כאשר נדרג את A נקבל בסוף התהליך, מטריצה
 עם n איברים פותחים. לכן קיימת מטריצה P מסדר $(n \times n)$
 כמו בצד, כלומר $PA=I$.

$$P = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{(n \times n)}$$

מכאן, לפי המשפט הקודם נובע ש- A הפיכה.

להפך, נניח ש- A הפיכה, ו- $\vec{b}$ וקטור ב- $\mathbb{R}^n$.
 נראה שלמערכת $A\vec{x}=\vec{b}$ יש פתרון יחיד.
 צריכים להציב את $2x=3$ $\cdot \frac{1}{2}$ הפתרון בחשבון המקורי לבדוק שהוא אכן פתרון אמיתי.

לכן אם נבחר $\vec{x}=A^{-1}\vec{b}$

(זה קיים כי A הפיכה ונקבל ש- $A\vec{x}=A(A^{-1}\vec{b})=(AA^{-1})\vec{b}=\vec{b}$)

נשאר להוכיח את יחידות הפתרון.

נניח ש- $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ פתרונות למערכת $A\vec{x}=\vec{b}$.

אז $A\vec{x}_1=A\vec{x}_2$ לכן $(A^{-1}A)\vec{x}_1=(A^{-1}A)\vec{x}_2 \Leftrightarrow A^{-1}(A\vec{x}_1)=A^{-1}(A\vec{x}_2)$
 לכן $\vec{x}_1=\vec{x}_2$

הוכחת ב':

נניח קודם ש- A הפיכה. אז לכל $b \in \mathbb{R}^n$ יש פתרון למערכת $A\vec{x}=\vec{b}$.
 (כי כמו קודם הוקטור $A\vec{x}=A^{-1}\vec{b}$ הוא פתרון למערכת)

להפך, נניח שלכל $b \in \mathbb{R}^n$ יש פתרון למערכת $A\vec{x}=\vec{b}$. נוכיח שאז A הפיכה.

בפרט יש פתרון $\vec{x}_1$ למערכת $A\vec{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

יש פתרון $\vec{x}_2$ למערכת $A\vec{x}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

יש פתרון $\vec{x}_n$ למערכת $A\vec{x}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

במילים אחרות: $A\vec{x}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ולכן $A[x_1 \cdots x_n]=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

כלומר אם נסמן ב- C את המטריצה שעמודותיה $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ נקבל ש- $AC=I_n$ ומכאן ש- A הפיכה.

מציאת המטריצה ההופכית

הסבר:

אם A מטריצה מסדר $(n \times n)$ והיא הפיכה, יש סדרה של פעולות אלמנטריות שמעבירות את A ל- I . נסמן ב- $P_1, P_2, \dots, P_k$ את המטריצות המייצגות את הפעולות הנ"ל.

נכפול משמאל את המטריצה $\underbrace{[A|I_n]}_{(n \times 2n)}$ ב- $P_1, P_2, \dots, P_k$ בסדר זה. בסוף התהליך נקבל $[I|P] = [I|P_1, P_2, \dots, P_k]$ כידוע $PA = I$ ולכן $P = A^{-1}$.

מסקנה:

אם A הפיכה אז הדירוג של $[A|I]$ מוביל ל- $[I|A^{-1}]$.
אם A לא הפיכה נקבל בחלק השמאלי של המטריצה במהלך הדירוג שורה שכולם אפסים (כי לא ייתכנו n איברים פותחים בצד שמאל).

$$\begin{bmatrix} \cos 90^\circ & \sin 90^\circ \\ -\sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

טענה: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ הפיכה אם"ם $ad-bc \neq 0$.

הוכחה: נדרג את $\left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array} \right]$.

נניח ש- $a \neq 0$ אז: $\xrightarrow{-\frac{c}{a}R_1 + R_2 \rightarrow R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d - \frac{bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array} \right]$ כאשר $d - \frac{bc}{a} = \frac{ad-bc}{a}$

נניח ש- $ad-bc \neq 0$ אז $\xrightarrow{\frac{a}{ad-bc}R_2 \rightarrow R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array} \right]$

$\xrightarrow{-bR_2 + R_1 \rightarrow R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} a & 0 & \frac{bc}{ad-bc} + 1 & \frac{-ab}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{a}R_1 \rightarrow R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} + 1 & \frac{-b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array} \right]$

מסקנה: אם $ad-bc \neq 0$ ואם $a \neq 0$ אז: $\otimes$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

נוסחה זה טובה גם כאשר $a=0$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad-bc & b \\ c & ad-bc \end{bmatrix} = (ad-bc) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

לכן אם $ad-bc \neq 0$, נובע ש-

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \left(\frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \right) = I$$

לכן $\otimes$ עדיין נכונה.

למשל $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{8-40} \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -8 & 2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{32} \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$

שיעור 6-א (24.11.09)

מטריצות משולשיות (Triangular matrix)

http://en.wikipedia.org/wiki/Triangular_matrix

http://he.wikipedia.org/wiki/מטריצה_משולשית

הגדרה: מטריצה מסדר $(n \times n)$ $A = (a_{ij})$ נקראת:

1. **משולשית עליונה** אם $a_{ij} = 0$ לכל $i > j$
 $U = \text{Upper triangular matrix}$
 (כלומר, מתחת לאלכסון יש רק אפסים)
 Matrix
2. **משולשית תחתונה** אם $a_{ij} = 0$ לכל $i < j$
 $L = \text{Lower triangular matrix}$
 (כלומר, מעל האלכסון יש רק אפסים)
3. **משולשית מתוקנת**
 Unitriangular
 אם A משולשית וכל איברי האלכסון שלה הם 1-ים.

טענה: אם A, B מטריצות משולשיות עליונות אז גם AB משולשית עליונה.

הוכחה: ניתן לרשום $A = \sum_{i \leq j} a_{ij} E_{ij}$ $B = \sum_{i \leq j} b_{ij} E_{ij}$

$$AB = \left(\sum_{i \leq j} a_{ij} E_{ij} \right) \left(\sum_{k \leq l} b_{kl} E_{kl} \right)$$

רק אם נקבל מכפלה שונה מ-0.

$$E_{ij} E_{kl} = \begin{cases} E_{il} & i=k \\ 0 & j \neq k \end{cases} \quad (\text{כלומר,})$$

$$AB = \left(\sum_{i \leq j} a_{ij} E_{ij} \right) \left(\sum_{k \leq l} b_{kl} E_{kl} \right) = \sum_{i \leq l} a_{ij} b_{il} E_{il} \quad \text{לסיים,}$$

במטריצה החדשה יש איברים שונים מ-0 רק במקומות il שבהם $i \leq l$.
 לכן מתחת לאלכסון יש רק אפסים.

טענה: אם $N = \begin{bmatrix} 0 & \square & \square & \square \\ 0 & \ddots & \square & \square \\ 0 & 0 & \ddots & \square \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ משולשית עליונה מסדר $(n \times n)$ עם אלכסון שכולם 0-ים אז $N^n = 0$

הסדר: לפי הנתון ניתן לרשום $N = \sum_{i < j} a_{ij} E_{ij}$ לכן $N^2 = \left(\sum_{i < j} a_{ij} E_{ij} \right) \left(\sum_{k < l} a_{kl} E_{kl} \right) = \sum_{i+1 < j} a_{ij} a_{jl} E_{il} \quad (i < j < l)$

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \square & \square \\ 0 & \ddots & \ddots & \square \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

נעבור $n-1$ מכפלות של N בעמה ונקבל רק אפסים. לכן $N^{(n-1)} = 0$.

טענה: כל מטריצה משולשית עליונה מתוקנת הוא הפיכה, והופכית שלה משולשית עליונה ומתוקנת.

הוכחה: בניח ש- A משולשית עליונה מתוקנת מסדר $(n \times n)$ אז $A = I - N$ כאשר I מטריצה היחידה ו- N מטריצה משולשית עליונה שהאלכסון שלה אפסים.

$$\left(\begin{array}{l} (1-x)(1+x+x^2+\dots+x^{n-1}) = 1-x^n \\ 1+x+x^2+\dots+x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x} \end{array} \right)$$

לכן $A(I + N + \dots + N^{n-1}) = (I - N)(I + N + \dots + N^{n-1}) = I - N^n = I$

לכן A הפיכה ו- $A^{-1} = I + \underbrace{N + N^2 + \dots + N^{n-1}}_{\text{סכום של משולשית עליונה עם אלכסון שכולם 0}}$

לכן A^{-1} משולשית עליונה מתוקנת.

משפט: כל מטריצה משולשית עליונה שכל איברי האלכסון שלה שונים מ-0 היא הפיכה, וההפיכה שלה היא מאותו סוג. (משפט דומה נכון למטריצה משולשית תחתונה)

הוכחה: בניח ש- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \square & \square \\ 0 & \ddots & \square \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$

כלומר $A = \underbrace{D}_{\text{משולשית עליונה מתוקנת אלכסונית}} \cdot \underbrace{M}_{\text{הפיכה}}$ אז $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \square & \square \\ 0 & \ddots & \square \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ חילוק ב- a_{ij} בשורה i , וכו'

לכן $A^{-1} = M^{-1} D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \square & \square \\ 0 & \ddots & \square \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}$ משולשית עליונה

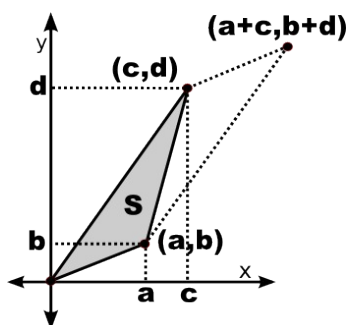
דטרמיננטות (Determinants)

<http://en.wikipedia.org/wiki/Determinant>

<http://he.wikipedia.org/wiki/דטרמיננטה>

הערה: ראינו שמטריצה $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ היא הפיכה אם $ad - bc \neq 0$.

שאלה: נתונים (a, b) ו- (c, d) וקטורים במישור כמו בציור.



לחשב את שטח המקבילית שקודקודיה $(0,0)$, (a,b) , $(a+c, b+d)$, (c,d)

$$S = \underbrace{\frac{cd}{2}}_{\text{משולש גדול}} - \underbrace{\frac{ab}{2}}_{\text{משולש קטן}} - \underbrace{\frac{(c-a)(b+d)}{2}}_{\text{שטח טרפז}}$$

לכן שטח המקבילית הוא $2S = cd - ab - (c-a)(b+d) = ad - bc$

הגדרה: הדטרמיננטה של מטריצה (2×2) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ מוגדר כך:

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

הערה: $|ad - bc|$ הוא שטח המקבילית שקודקודיה $(0,0)$, (a,b) , (c,d) , $(a+c, b+d)$

תכונות של דטרמיננטה (2x2)

1. אם ב-A יש שורת אפסים, אז $\det A = 0$
הוכחה: $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{vmatrix} = 0d - 0c = 0$
 2. אם ב-A יש שתי שורות שוות אז $\det A = 0$
הוכחה: $\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0$
 3. החלפת שורות משנה את סימן הדטרמיננטה.
הוכחה: $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb - ad = -(ad - bc) = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$
 4. כפל של שורה בסקלר גורם לכפל של הדטרמיננטה באותו סקלר.
הוכחה: $\begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = kad - kbc = k(ad - bc) = k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$
 5. הוספת כפולה של שורה לשורת אחרת לא משנה את ערך הדטרמיננטה.
הוכחה: $\begin{vmatrix} a & b \\ c+ka & d+kb \end{vmatrix} = a(d+kb) - b(c+ka) = ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$
 6. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- הדטרמיננטה היא סכום של שני מחוברים, שכל אחד מהם הוא מכפלה של איברי המטריצה, כשאר מכל שורה ומכל עמודה נבחר איבר פעם אחת ויחידה.

תמורה מתאימה:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{21} \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

0 היפוכים

זו נקראת תמורה זוגית

והסימן המתאים לה הוא +

היפוך אחד

זו נקראת תמורה אי זוגית

והסימן המתאים לה הוא -

הגדרה: **תמורה** של n מספרים $\{1, 2, \dots, n\}$
היא סידור כלשהו של n המספרים האלה במקומות $\{1, 2, \dots, n\}$

דוגמאות: כל התמורות של $\{1, 2\}$ הן $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

יש $2! = 2$ תמורות של 2 מספרים

כל התמורות של $\{1,2,3\}$ הן

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

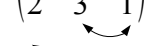
יש $3! = 6$ תמורות של 3 עצמים.

הגדרה: היפוך (בתמורה) היא הופעה בשורה תחתונה של מספר גדול למספר קטן יותר ממנו. הזוגיות של תמורה = מס' ההיפוכים שבה.

דוגמה: יש 3 היפוכים = תמורה אי זוגית. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$



יש 2 היפוכים = תמורה זוגית. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$



נוסחה לסימון של תמורה על a עצמים

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \quad \text{נביח}$$

אם $(i < j) \quad \sigma(i) - \sigma(j) < 0$ היפוך
אם $(i > j) \quad \sigma(i) - \sigma(j) > 0$ אין היפוך

$$\text{לכן} \quad \text{sign}(\sigma) = \prod_{i < j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$$

זו מכפלה שערכו המולט הוא n
והסימן שלה + או - לפי זוגיות או אי זוגיות מספר ההיפוכים.

$$\frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = 1 + 2 + \dots + (n-1)$$

שיעור 6-ב (26.11.09)

תמורה של מספרים $1, 2, \dots, n$ היא פונקציה חח"ע ועל
 $\sigma: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$

נהג לסמן פונקציה הזו גם ש- $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & n \\ \sigma(1) & \sigma(n) \end{pmatrix}$

כאשר בשורה התחתונה מופיעים $1, 2, \dots, n$ בסדר אמר.

הסימן של תמורה σ הוא $(-1)^k$ כאשר k הוא מספר ההיפוכים ב- σ
 (היפוך = הופעת i משמאל ל- j כאשר $i > j$ בשורה תחתונה).

למשל $(1) \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

מס' היפוכים לכן $\text{sign } \sigma = (-1)^2 = 1$

$$\det = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum \text{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

הגדרה:

(כאשר σ תמורה על $1, 2, \dots, n$)

מס' המחוברים כסכום שווה למס' התמורות של $1, 2, \dots, n$
 כלומר יש $n!$ מחוברים.

דוגמה:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}^+ a_{11}a_{22}a_{33} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}^- a_{11}a_{23}a_{32} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}^+ a_{12}a_{21}a_{33} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}^- a_{12}a_{23}a_{31} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}^+ a_{13}a_{21}a_{32} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}^- a_{13}a_{22}a_{31}$$

הערה חשובה מאוד:

$$(3) \begin{vmatrix} + & - & + \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

פיתוח הדטרמיננטה לפי שורה I

$$(-1)^{i+j}$$

שאלה: כיצד נראה הפיתוח של דטרמיננטה הנ"ל לפי עמודה II?

תשובה:

$$\begin{vmatrix} - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

פיתוח לפי עמודה II

הגדרה: נניח ש- $A = (a_{ij})$ מטריצה מסדר $(n \times n)$. **המינור** של איבר a_{ij} במטריצה מוגדר כדטרמיננטה של המטריצה מסדר $(n-1) \times (n-1)$ ע"י מחיקת שורה i ועמודה j . מסמנים את המינור של a_{ij} ע"י M_{ij} .

משפט: אם $A = (a_{ij})$ מטריצה מסדר $(n \times n)$ אז לכל $1 \leq i \leq n$ ולכל $1 \leq j \leq n$ מתקיים:

פיתוח שורה i :

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} \cdot M_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \cdot M_{i2} + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} \cdot M_{in} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot M_{ij}$$

פיתוח לפי עמודה j :

$$\det A = (-1)^{1+j} a_{1j} \cdot M_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j} \cdot M_{2j} + \dots + (-1)^{n+j} a_{nj} \cdot M_{nj} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot M_{ij}$$

דוגמה:

$$\begin{array}{cccc}
 + & - & + & - \\
 \left| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right| & = & (-1) \underbrace{\left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right|}_{\text{פיתוח לפי שורה II}} + \underbrace{\left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right|}_{\text{פיתוח לפי שורה I}} - \underbrace{\left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right|}_{\text{פיתוח לפי שורה I}}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 &= (-1) \left[(-1) \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right| + (-1) \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right| \right] + \left[1 \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right| + (-1) \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right| \right] - \left[1 \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array} \right| + (-1) \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right| \right] \\
 &= -[(-1)(-1) + (-1) \cdot 0] + [(-1) + 0] - [1 + 1 \cdot 0] \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

משפט: נניח A מטריצה מסדר (nxn)

1. אם ל-A יש שורת אפסים אז $\det A = 0$
2. כפל שורה A בסקלר c גורם גם לכפל של הדטרמיננטה באותו סקלר.
3. אם ב-A יש שתי שורות זהות אז $\det A = 0$
4. החלפת שורה ב-A גורמת לשינוי הסימן של הדטרמיננטה.
5. הוספת כפולה של שורה לשורה אחרת של A לא משנה את הדטרמיננטה.
6. כל התכונות הנ"ל נכונות גם לגבי עמודות.

הוכחה:

1. אם ל-A יש שורת אפסים אז $\det A = 0$

$$\text{שורה } i \rightarrow \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right| = \underbrace{0 \cdot M_{i1} + 0 \cdot M_{i2} + \dots + 0 \cdot M_{in}}_{\text{פיתוח לפי שורה } i} = 0$$

2. **כפל שורה A בסקלר c גורם גם לכפל של הדטרמיננטה באותו סקלר.**

$$\begin{aligned}
 \text{שורה } i \rightarrow & \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c a_{i1} & \cdots & c a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
 = & \underbrace{(-1)^{i+1} c a_{i1} M_{i1}}_{\text{פיתוח לפי שורה } i} + \underbrace{(-1)^{i+2} c a_{i2} M_{i2}}_{\text{מינור של } A=(a_{ij})} + \cdots + \underbrace{(-1)^{i+n} c a_{in} M_{in}}_{\text{מינור של } A=(a_{ij})} \\
 = & c \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = c \cdot \det A
 \end{aligned}$$

3. **אם ב-A יש שתי שורות זהות אז $\det A = 0$**

הוכחה באינדוקציה על n.

עבור n=2:

אם במטריצה A מסדר 2x2 יש שתי שורות זהות אז $\det A = 0$ (קבוע)

נניח התכונה נכונה בכל מטריצה מסדר $(n-1) \times (n-1)$ ונניח אותה למטריצה מבסדר (nxn)

נניח שבמטריצה מבסדר (nxn), $n > 2$, יש שתי שורות זכות.

נבחר שורה i השורה השונה משתי השורות האלה ונפתח את $\det A$ לפי שורה i:

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} \quad \text{אז}$$

כל מינור M_{ij} הוא הדטרמיננטה של מטריצה $(n-1) \times (n-1)$ שבה יש שתי שורות זהות לכן לפי ההנחה $M_{ij} = 0$ לכל $i \leq n \leq n$ לכן $\det A = 0$

4. **החלפת שורה ב-A גורמת לשינוי הסימן של הדטרמיננטה.**

נדלג בינתיים.

5. **הוספת כפולה של שורה לשורה אחרת של A לא משנה את הדטרמיננטה.**

נניח ש- $A = (a_{ij})$

$$\begin{aligned}
 i \neq j \rightarrow & \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + \lambda a_{j1} & \cdots & a_{in} + \lambda a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \stackrel{\text{פיתוח לפי שורה } i}{=} (-1)^{i+1} (a_{i1} + \lambda a_{j1}) M_{i1} + \cdots + (-1)^{i+n} (a_{in} + \lambda a_{jn}) M_{in} \\
 = & \underbrace{[(-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} M_{in}]}_{\det A} + \underbrace{\lambda [(-1)^{i+1} a_{j1} M_{i1} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{jn} M_{in}]}_{\otimes = 0} = \det A
 \end{aligned}$$

מטריצה המתקבלת מ-A על ידי הוספת כפולה של שורה j לשורה i.

$$i \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right|$$

הביטוי $\oplus$ הוא הפיתוח של

(כל השורות למעט שורה i זהות לאלה של A)

וזו מטריצה שבה שורה i שווה לשורה j.

ולכן הדטרמיננטה זו היא 0.

שיעור 7-א (1.12.09)

הוכחנו משפט לגבי השפעת פעולות אלמנטריות על דטרמיננטות.
נותר להראות שהחלפת שורות משנה את סימן הדטרמיננטה.

הוכחה:

נסמן ב- $a_1, a_2, \dots, a_n$ את השורות של מטריצה A מסדר (n x n) אז.

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_1 \\ a_i \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \stackrel{(1)}{=} \det \begin{bmatrix} a_1 \\ a_i \\ a_i + a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \stackrel{(2)}{=} \det \begin{bmatrix} a_1 \\ -a_j \\ a_i + a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \stackrel{(3)}{=} \det \begin{bmatrix} a_1 \\ -a_j \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \stackrel{(4)}{=} -\det \begin{bmatrix} a_1 \\ a_j \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

(1) הוספת שורה i לשורה j (לא משנה det)

(2) חיבור שורה j משורה i (לא משנה det)

(3) הוספת שורה i לשורה j (לא משנה det)

(4) הוצאת סקלר משורה (וזו מטריצה המתקבלת מ-A ע"י החלפה בשורות ij)

משפט:

כל התכונות של המשפט הקודם נכונות גם לגבי עמודות (הוכחה דומה).

תרגיל:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{\text{חיבור שורה 2 משורה 4}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{פיתוח לפי עמ' 1}}{=} (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \text{ לחשב את}$$

$$(-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{חיבור שורה 1 לשורה 2}}{=} (-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{פיתוח לפי עמודה 2}}{=} (-1) \cdot (-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

הדטרמיננטה של מטריצה ריבועית משולשית
שווה תמיד למכפלת איברי האלכסון.

משפט:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix} \stackrel{\text{פיתוח לפי עמודה 1}}{=} a_{11} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

הוכחה:

כנ"ל לגבי מטריצה משולשית תחתונה.

שאלה: לחשב את מטריצה (n x n)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

פתרון:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-1 & n-1 & n-1 & \dots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

מחבר את שורות 2,3,...,n לשורה 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{הוצאת גורם משותף } n} (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

חיסור שורה 1 מכל השאר

$$= (n-1)(-1)^{n-1}$$

]] הגענו למטריצה משולשית עליונה, ולפי משפט הקודם, הדטרמיננטה של מטריצה כזאת היא מכפלת כל איברי האלכסון שלה. חוץ מאיבר הראשון באלכסון "1", כל השאר הם "1-". לכן הדטרמיננטה של המטריצה זו היא $(-1)^{n-1}$ (כל האיברי האלכסון חוץ מהראשון).]]

למשל: עבור $n=4$, הדטרמיננטה היא (-3) .

משפט: לכל מטריצה ריבועית A חאח מתקיים: $|A'| = |A|$

הוכחה:

באינדוקציה על n עבור $n=1$ ברור.

נניח שהטענה נכונה לכל מטריצה מסדר $(n-1) \times (n-1)$

ונוכיח לסדר $(n \times n)$

$$\det A' = \det \begin{bmatrix} a_{1n} & \dots & a_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{פיתוח לפי עמ' 1}} a_{11} \underbrace{M'_{11}}_{\text{המינור המתאים ב- } A'} - a_{12} M'_{12} + \dots + (-1)^{n-1} a_{1n} \underbrace{M'_{1n}}_{\text{מינור של } A'}$$

המינורים של A' הם דטרמיננטות של מטריצות בגודל $(n-1) \times (n-1)$ ולכן לפי הנחת האינדוקציה הם שווים לדטרמיננטות של המטריצות המשוחלפות. וכך נקבל מינורים של A עצמה.

תזכורת: מה זה מינור?

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$M'_{23} = M_{32} \quad -!$$

$$M'_{ij} = M_{ij} \quad \underbrace{=}_{\substack{\text{השיחלוק לא משפיע על דטרמיננטה} \\ n-1 \times n-1}} \sum_{\delta=1}^n n(-1)^{1+j} a_{ij} M_{ij} = |A|$$

משפט:

נסמן ב- $a_1, \dots, a_n$ n וקטורי שורה ונניח שגם b_i וקטור שורה.

]] בניה שיש לנו שתי מטריצות A, B
שהן זהות חוץ משורה אחת, שורה ה-i,
ששווה ל- a_i ב-A ו- b_i ב-B.

אז סכום הדטרמיננטות שלהן שווה
לדטרמיננטה של מטריצה שזה חוץ
משורה ה-i ששווה ל- $a_i + b_i$]]

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i + b_i \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix}$$

הוכחה:

אם נסמן $a_k = a_{k1}, \dots, a_{kn}$, $b_i = b_{i1}, \dots, b_{in}$ לכל $1 \leq k \leq n$. אז

$$\det \begin{vmatrix} a \\ a_i + b_i \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} \underbrace{=}_{\substack{\text{פיתוח לפי שורה } i}} \sum_{j=1}^n n(-1)^{i+j} (a_{ij} + b_{ij}) \underbrace{M_{ij}}_{\substack{\text{מינורם של המטריצה } A = (a_{ij}) \\ \text{בלי תוספת } b_i}}$$

$$= \sum_{j=1}^n n(-1)^{i+j} M_{ij} + \sum_{j=1}^n n(-1)^{i+j} b_{ij} M_{ij} = \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix}$$

$$(0,1,1,1)=(-1,0,0,0)+(1,1,1,1)$$

דוגמה:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}_{D_4} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1) D_3 + (-1)^3$$

$$= (-1) \underbrace{\left[(-1) D_2 + (-1)^2 \right]}_{\text{אותה שיטה}} + (-1)^3 = (-1) \left[(-1)(-1) + 1 \right] + (-1)^3 = -3$$

$$\begin{aligned} D_n &= a D_{n-1} + b \\ D_{n-1} &= a D_{n-2} + b \times a \\ D_{n-2} &= a D_{n-3} + b \times a^2 \\ \underline{D_2 &= a D_1 - b \times a^{n-2}} \\ D_n &= b(1 + a + \dots + a^{n-2}) + a D_1 \\ D_2 &= b \frac{1 - a^{n-1}}{1 - a} + a D_1 \end{aligned}$$

הוכחנו את המשפט שאם A,B מטריצות מסדר (n,n)
אז AB רגולרית (הפיכה) אם ורק אם גם A וגם B הפיכות.
לכן AB סינגולרית אם ורק אם A סינגולרית או B סינגולרית.

תזכורת:

בדרך כלל, אם A,B מטריצות (n,n) אז $|A+B| \neq |A|+|B|$

הערה:

$$1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}_{=0} + \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{=0} \quad \text{למשל:}$$

משפט עזר: לכל מטריצה רגולרית A ($n \times n$) ולכל אלמנטרית E ($n \times n$) מתקיים:

$$|EA| = |E||A|$$

הוכחה:

1. נניח E מייצגת פעולת הוספת כפולה של שורה לשורה אחרת.

$$\left| \begin{array}{c} EA \\ \hline \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} A \\ \hline \end{array} \right| \quad \text{אז} \quad \text{הדטרמיננטה של } A \text{ לא משתנה}$$

זו המטריצה המתקבלת מ- A ע"י הוספת הפולה של שורה לשורה אחרת

אבל $E = I + \lambda \underbrace{E_{ij}}_{i \neq j} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & \ddots & \\ \lambda & & 1 \end{bmatrix}$ מטריצה משולשית שכל איברי האלכסון שלה הם 1
 לכן $|E| = 1$ מכאן ש- $|EA| = |A| = |E| \cdot |A|$ (כי $|E| = 1$)

2. נניח ש- E מייצגת החלפת שורות

$$\text{אז } |EA| = -|A| \quad \text{זו המטריצה המתקבלת מ-} A \text{ על ידי החלפת שתי שורות}$$

מצב שני:

$$|E| = -|I| = -1 \rightarrow \text{המטריצה המתקבלת מ-} i \text{ ע"י החלפת שתי שורות.}$$

$$\text{לכן } |EA| = |E||A|$$

3. נניח ש- E מייצגת כפל שורת i ב- $c \neq 0$

$$\text{אז } |EA| = c|A| \leftarrow \text{כי זו מטריצה המתקבלת מ-} A \text{ ע"י כפל בשורה } i \text{ ב-} c.$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & c & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{לכן } |E| = c \quad \text{ולכן שוב } |EA| = |E||A|$$

משפט:

אם A ו- P מטריצות מסדר $(n \times n)$ ואם P רגולרית אז $|PA| = |P||A|$

הוכחה:

אם P רגולרית אז P היא מכפלה של מטריצות אלמנטריות.

$$P = \underbrace{E_1 E_2 \dots E_n}_{\text{כולם אלמנטריות}}$$

כלומר

$$\begin{aligned} |PA| &= |E_1(E_2 \dots E_n A)| \stackrel{\text{לפי משפט העזר}}{=} |E_1| |E_2 \dots E_n A| \stackrel{\text{שימוש חוזר במשפט}}{=} |E_1| |E_2| \dots |E_n| |A| \\ &= |E_1| |E_2| \dots |E_{n-1} E_n| |A| \\ &= |E_1| |E_2| \dots |E_{n-1}| |E_n| |A| \quad (\text{כי } |E_{n-1} E_n| = |E_{n-1}| |E_n| \text{ אלמנטרית}) \\ &\stackrel{\text{כי } E_{n-2} \text{ אלמנטרית}}{=} |E_1| |E_2| \dots |E_{n-2} E_{n-1} E_n| |A| \stackrel{\text{שימוש חוזר במשפט}}{=} |E_1 \dots E_n| |A| = |P| |A| \end{aligned}$$

משפט:

לכל שתי מטריצות A, B מסד חאח מתקיים ש- $|AB| = |A||B|$.

הוכחה:

הוכחנו זאת כשאר A רגולרית.

$$|AB| = |(AB)^t| = |B^t A^t| = |B^t| |A^t| = \underbrace{|B| |A|}_{\text{מספרים}} = |A| |B|$$

אם B רגולרית אז

B' רגולרית כאשר B רגולרית.

אם A או B סינגולרית אז גם AB סינגולרית.

ואז $|AB| = |A| \cdot |B|$ כי הדטרמיננטה של מטריצה סינגולרית היא 0 (נוכיח בהמשך)

שיעור 7-ב (3.12.09)

הוכחנו שאם A, B מטריצות $(n \times n)$ ואם A רגולרית אז $|AB| = |A||B|$

טענה 1: אם A רגולרית אז $|A| \neq 0$

הוכחה: אם A רגולרית אז קיימת מטריצה הפיכה רגולרית A^{-1} כך ש- $A^{-1}A = I$

$$\begin{aligned} \text{לכן לפי משפט הקודם} \quad |A^{-1}A| &= |A^{-1}||A| = |I| \\ \text{כלומר} \quad |A^{-1}||A| &= 1, \text{ ולכן } |A| \neq 0 \text{ וגם } |A^{-1}| \neq 0 \\ \text{וקיבלנו שגם} \quad |A^{-1}| &= \frac{1}{|A|} \end{aligned}$$

טענה 2: אם A ריבועית ולא הפיכה (סינגולרית) אז $|A| = 0$

הוכחה: כאשר מדרגים את A מקבלים מטריצה שבה לפחות שורות אפסים אחת.

$$PA = \begin{bmatrix} \square & & \\ 0 & \square & \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

מטריצה מדרגות שבה השורה הראשונה כולה אפסים

במילים אחרות, קימת מטריצה רגולרית P כך ש-

$$\begin{aligned} \text{אז } |PA| &= 0 \text{ (היא שווה למכפלת איברי האלכסון)} \\ \text{לפי המשפט הקודם, מאחר ש-} P &\text{ רגולרית מתקיים } |PA| = |P||A| \\ \text{לכן } |P| \cdot |A| &= 0 \text{ ו- } |P| \neq 0 \text{ כי } P \text{ רגולרית ולכן } |A| = 0 \end{aligned}$$

מסקנה: מטריצה ריבועית A היא רגולרית אם ורק אם $\det A \neq 0$.

משפט: לכל שתי מטריצות A, B מסדר $(n \times n)$ מתקיים $|AB| = |A||B|$

הוכחה: אם A רגולרית, ראינו שהטענה נכונה במשפט קודם.

לכן נניח ש- A סינגולרית. אז $|A| = 0$

מצב שני, גם AB חייבת במקרה זה להיות סינגולרית.
(אם AB רגולרית אז גם A וגם B רגולרית).

מאחר ש- AB סינגולרית נובע ש- $|AB| = 0$ (לפי טענה קודמת).

$$\text{לכן } |AB| = 0 = \underbrace{|A|}_{=0} |B| \quad \text{מ.ש.ל.}$$

מסקנה: אם A מטריצה ריבועית אז $det(A^k) = det(\underbrace{A \cdot A \cdots A}_k \text{ פעמים}) = (det A)^k$ k טבעי

טענות: אם A, B מטריצות מסדר (חאח) אז $det(AB) = det(BA)$
הוכחה: $det(AB) = det(A) det(B) = det(B) det(A) = det(BA)$

טענה 3: אם A, P מסדר (חאח) ו- P הפיכה אז $det(P^{-1} A P) = det(A)$
הוכחה: $det((P^{-1} A) P) = \underbrace{det(P^{-1} A) det(P)}_{\text{לפי 2}} = det(P(P^{-1} A)) = det A$

טענה 4: אם A, P מסדר (חאח) ואם P רגולרית אז $det[(P^{-1} A P)^k] = det(A^k)$
הוכחה: $[P^{-1} A P]^k = \underbrace{(P^{-1} A P)(P^{-1} A P) \cdots (P^{-1} A P)}_{k \text{ פעמים}} = P^{-1} A^k P$
 לכן $det((P^{-1} A P)^k) = det(P^{-1} A^k P) = det(A^k)$

המטריצה הצמודה (Adjugate matrix)

לפעמים נקרא ה-"adjoint" אבל זה בדרך כלל מתייחס למושג אחר!

http://en.wikipedia.org/wiki/Adjugate_matrix

http://he.wikipedia.org/wiki/מטריצה_מצורפת

תזכורת: אם $A = (a_{ij})$ מטריצה מסדר (חאח)
 אז $det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$ (פיתוח לפי שורה i של $det A$)

טענה: אם $A = (a_{ij})$ מטריצה מסדר (חאח) אז לכל $k \neq i$ מתקיים:
 $\sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{kj} M_{ij} = 0$ $\otimes$ (וגם i קבוע) (קבוע i ששונה מ- i)

הוכחה: נשים לב שהביטוי $\otimes$ הוא הפיתוח לפי שורה i של שהדטרמיננטה הבא:

כל שורה השונה מ- i היא בעצם שורה של A המקורית
 (זו המטריצה A שבה במקום שורה i מופיע שורה k פעם נוספת).

$$i \text{ שורה} \rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{ki} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ולכן זו דטרמיננטה שבה יש שתי שורות זהות (שורות i ו- j) ולכן היא שווה ל-0.

מסקנה: $\otimes$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{11} & -M_{21} & \cdots & (-1)^{n+1} M_{n1} \\ -M_{12} & M_{22} & \cdots & (-1)^{n+2} M_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1} M_{1n} & (-1)^{n+2} M_{2n} & \cdots & (-1)^{n+n} M_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{bmatrix}$$

$$= \det A \cdot I$$

למשל במקום (1,2) במטריצה המכפלה מקבלים:

$$\sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} M_{2j} = 0$$

הגדרה:

לכל מטריצה ריבועית A מסדר (n,n)

מגדירים את **המטריצה הצמודה** לה המסומנת ב- $\text{adj}(A)$ שאיבריה הם:

$$(\text{adj} A)_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ji}$$

$$\text{adj} A = \begin{bmatrix} M_{11} & -M_{12} & \cdots & (-1)^{1+n} M_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1} M_{n1} & \cdots & \cdots & M_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{במילים אחרות:}$$

משפט:

(מסקנה מן החישוב הקודם)

לכל מטריצה A מסדר (n,n) מתקיים $A \cdot \text{adj} A = (\det A) \cdot I$

$$\text{מסקנה:} \quad \text{אם } \det A \neq 0 \text{ אז } A \cdot \left[\frac{1}{\det A} \text{adj}(A) \right] = I \quad \text{ולכן} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (\text{adj} A)$$

הערה:

מן השוויון $\otimes$ נובע שגם $\text{adj} A \cdot A = (\det A) \cdot I$

(נקבל פיתוחי דטרמיננטות לפי עמודה)

$$\text{לכן} \quad A(\text{adj} A) = (\text{adj} A)A = (\det A) \cdot I$$

דוגמה:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ נביח ש-}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \text{ אז}$$

$$A \cdot \text{adj } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = \det A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ לכן}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj } A = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \text{ אז } \det A \neq 0 \text{ לכן אם}$$

שיטת קרמר לפתרון מערכת משוואות (Cramer's Rule)

http://en.wikipedia.org/wiki/Cramer's_rule

<http://he.wikipedia.org/wiki/קרמר> נוסחת קרמר

נביח שנתונה מערכת $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ שבה A מטריצה הפיכה מסדר n (חנח).
כידוע למערכת זאת יש פתרון יחיד.

נכפול את השוויון $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ ב- $\text{adj } A$ משמאל ונקבל: $(\text{adj } A)A\mathbf{x}=\text{adj } A\cdot\mathbf{b}$
לכן $(\det A)\cdot I\cdot\mathbf{x}=\text{adj } A\cdot\mathbf{b}$

$$(\det A) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & \cdots & (-1)^{n+1} M_{n1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ (-1)^{n+1} M_{1n} & \cdots & (-1)^{2n} M_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

נשים לב שהמכפלה היא וקטור עמודה שבו רכיב מספר i הוא

$$\sum_{j=1}^n (-1)^{j+i} M_{ji} b_j = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} b_j M_{ji}$$

פיתוח לפי עמודה i של דטרמיננטה של מטריצה
המתקבלת מ- A ע"י החלפת עמודה i שלה בוקטור $\mathbf{b}$.

לכן ברכיב i בשוויון הקודם נקבל:

$$(\det A) \cdot x_i = \begin{bmatrix} i \\ a_{11} & b_i & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & b_n & a_{in} \end{bmatrix}$$

כל העמודות האחרות (פרט לעמודה 1 מן עמודות A)

מסקנה: אם $\det A \neq 0$ אז פתרון המערכת $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ נתון ע"י $x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$

כאשר A_i המטריצה המקבלת מ-A ע"י החלפת עמודה i ב-b. (שיטת קרמר)

הסבר אחר: נניח ש-A הפיכה ו- $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ פתרון למערכת $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$

כלומר אם נסמן ב- $C_1, C_2, \dots, C_n$ את העמודות של A אז

$$x_1 C_1 + x_2 C_2 + \dots + x_n C_n = \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{b} & C_2 & \cdots & C_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_1 C_1 + \dots + X_n C_n & C_2 & \cdots & C_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad \text{לכן}$$

$$= \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_1 C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = X_1 \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = x_1 \det A$$

↑ על ידי פעולות אלמנטריות על עמודה אפשר להגיע לזה

לכן $x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}$ (המונה החלפת עמודה 1 של $b \rightarrow A$)

דוגמה: נתונה
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$$

וכן"
$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 8 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}} \quad x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 7 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}}$$

18.06 Linear Algebra

Professor Gilbert Strang

Video Lectures

(מחברים משיעור 5)

<http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Mathematics/18-06Spring-2005/VideoLectures/index.htm>

שיעור 8-א (08.12.09)

מרחבים לינאריים

http://en.wikipedia.org/wiki/Vector_spacehttp://he.wikipedia.org/wiki/מרחב_וקטורימומלץ
בחום

הגדרה: נאמר שקבוצה V היא מרחב לינארי ביחס לפעולות $+$, $\cdot$ (חיבור וכפל בסקלר) אם מתקיימות תכונות הבאות:

תכונות החיבור

1. לכל $u, v \in V$ מתקיים $u+v \in V$ (סגירות)
2. לכל $u, v, w \in V$ מתקיים $(u+v)+w = u+(v+w)$ (קיבוציות)
3. קיים וקטור $0 \in V$ כך ש- $v+0=0+v=v$ לכל $v \in V$ (קיום איבר נטרלי ביחס לחיבור)
4. לכל $v \in V$ קיים וקטור ב- V שמסומן ב- $-v$ כך ש- $v+(-v)=0$ (לכל וקטור יש נגדי ביחס לחיבור)
5. לכל $u, v \in V$, $u+v=v+u$ (חילופיות החיבור)

תכונות הכפל בסקלר

6. לכל $v \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda v \in V$ (סגירות הכפל בסקלר)
7. לכל $u, v \in V$ ולכל $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$ (פילוג)
8. לכל $u, v \in V$ ולכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$
9. לכל $u \in V$ ולכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$
10. לכל $u \in V$, $1 \cdot u = u$

דוגמאות של מרחבים לינאריים

1. $\mathbb{R}^n$ עם הפעולות הרגילות של חיבור וקטורים וכפל וקטור בסקלר.
(הוכחנו שכל התכונות מתקיימות)
2. $M_{n \times k}^{\mathbb{R}}$ קבוצת מרחב כל המטריצות מסדר קבוע $(n \times k)$ עם רכיבים ממשיים.
(הוכחנו שכל התכונות בהגדרת המרחב הלינארית מתקיימות)
3. $V = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ פונקציה}\}$ - מרחב כל הפונקציות מ- $\mathbb{R}$ ל- $\mathbb{R}$ עם פעולות החיבור והכפל בסקלר הרגילות. (אפשר להוכיח שזה מרחב לינארי ביחס לפעולות הנ"ל)
4. $\mathbb{R}[x] = \{P(x) \mid P(x) \text{ פילונום עם מקדמים ממשיים}\}$
מרחב כל הפולינומים עם מקדמים ממשיים הוא מרחב לינארי ביחס לחיבור וכפל בסקלר של פולינומים. (ולהוכיח)
5. $\mathbb{R}_n[x] = \{a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ (n קבוע).
מרחב כל הפולינומים ממעלה $n \geq$
הוא מרחב לינארית ביחס לפעולות החיבור והכפל בסקלר הרגילות.

משפט: נניח ש- V מרחב לינארי. אז:

1. $V \neq \emptyset$
2. יש וקטור יחיד שהוא נטרלי לגבי חיבור
3. $0 \cdot v = \underline{0}$ לכל $v \in V$
4. $\alpha \cdot \underline{0} = \underline{0}$ לכל $\alpha \in \mathbb{R}$
5. $-v = (-1)v$ לכל $v \in V$
6. $\alpha v = \underline{0}$ אם $\alpha = 0$ או $v = \underline{0}$

הוכחה:

$$V \neq \emptyset \quad (1)$$

בהגדרה של מרחב לינארי כתוב שקיים וקטור שהוא נטרלי ביחס לחיבור.

לכן $V \neq \emptyset$

$$\text{יש וקטור יחיד שהוא נטרלי לגבי חיבור} \quad (2)$$

בניח ש- $w \in V$ הוא נטרלי בחיבור, יחד עם 0 שקיומו מובטח מן ההגדרה.

$$\text{אז } w = 0 \quad \text{לכן } \underbrace{0}_{\text{כיש נטרלי}} = w + \underbrace{0}_{\text{כיש נטרלי}} = w$$

$$0 \cdot v = 0 \quad \text{לכל } v \in V \quad (3)$$

$$0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v = \underbrace{0 \cdot v + 0 \cdot v}_{\text{פילוג}}$$

לכן $0 \cdot v = 0v + 0v$ (נוסיף $-0v$ לשני האגפים - יש וקטור כזה)

$$0 \cdot v + (-0 \cdot v) = (0 \cdot v + 0 \cdot v) + (-0 \cdot v) \quad \text{לכן}$$

$$0 = 0 \cdot v + (0 \cdot v + (-0 \cdot v)) \quad \text{לכן} \quad 0 = 0 \cdot v + 0$$

$$0 = 0 \cdot v + 0 \quad \text{(תכונת הנגדי)}$$

$$0 = 0 \cdot v \quad \text{(0 נטרלי)}$$

$$\alpha \cdot 0 = 0 \quad \text{לכל } \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{- הוכחה דומה.} \quad (4)$$

$$-v = (-1)v \quad \text{לכל } v \in V \quad (5)$$

$$(1 + (-1))v = 1 \cdot v + (-1)v$$

$$0 \cdot v = v + (-1)v \quad \text{לכן} \quad (1 \cdot v = v)$$

$$0 = v + (-1)v \quad \text{(4 לפי } 0v = 0 \text{)}$$

$$(-v) + 0 = -v + (v + (-1)v)$$

$$-v = (-v + v) + (-1)v \quad \text{(קיבוציות, 0 נטרלי)}$$

$$-v = 0 + (-1)v$$

$$-v = (-1)v \quad \text{ולכן}$$

$$\alpha v = 0 \quad \text{אם } \alpha = 0 \text{ או } v = 0 \quad \text{- לנסות לבד.} \quad (6)$$

הערה: אם V מרחב לינארי אז:

1. הקבוצה $\{0\}$ יחד עם פעולות החיבור והכפל בסקלר של V היא מרחב לינארית

2. $\{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ היא מרחב לינארי ביחס לפעולות של V כאשר $v \neq 0$

(זה נקרא הישר הנפרש על ידי v)

תת-מרחבים של מרחב לינארי

הגדרה:

נניח ש- V מרחב לינארי.

נאמר שקבוצה $W \subseteq V$ היא תת-מרחב של V אם היא בעצמה מרחב לינארי ביחס לפעולות של V .

הערה:

אם $W \subseteq V$ אז פרט לתכונות הסגירות לחיבור וכפל בסקלר, קיום נטרלי ונגדי לגבי חיבור, כל השאר מתקיים.
(כי התכונות האחרות מתקיימות ב- W נובע שמתקיימות ב- V).

הערה:

נטרלי בקבוצה קטנה יכול היות שונה מנטרלי בקבוצה גדולה יותר.

דוגמה:

$A = \{2, 4, 6, 8\}$ עם הפעולה כפל מודולו 10. 6 נטרלי יחיד ב- A .
לעומת זאת, בקבוצה $B = \{1, 2, 4, 6, 8\}$ עם הכפל מודולו 10, הנטרלי הוא 1 אבל 6 כבר לא נטרלי ($1 \cdot 6 \neq 1$)

טענה:

1. אם $W \subseteq V$, W תת מרחב של V , אז $0 \in W$ (כאשר 0 הוא הנטרלי של V).
2. לכל $v \in W$ גם $-v \in W$ (הנגדי של v ב- V נמצא גם ב- W).

הוכחה:

1. אם $W \subseteq V$, W תת מרחב של V , אז $0 \in W$ (כאשר 0 הנטרלי של V).

W תת-מרחב לכן הוא מרחב לינארי ולכן יש בו נטרלי לגבי חיבור

נסמן ב- W_0 את הנטרלי של W .

אז $W_0 + W_0 = W_0$ (כי W_0 הוא הנטרלי של W)

נחבר $-W_0$ לשני האגפים: מקבלים בסוף: $W_0 = 0$ ולכן $0 \in W$
(הנגדי של W_0 ב- V)

הוכחה אחרת:

$$W_0 \in W$$

לכן $v \cdot W_0 \in W$ (סגירות ב- לכפל בסקלר)

לכן $0 \in W$ (כי $0 \cdot W_0 = 0$)

2. לכל $v \in W$ גם $-v \in W$ (הנגדי של v ב- V נמצא גם ב- W).

$0 \in W$ לכן

0 נטרלי גם - W (והוא נטרלי היחיד שם)

נניח ש- $w \in W$. ל- w יש נגדי ב- W (כי W מרחב)

נסמן אותו ב- W . $(u \in W)$

מתקיים $w + u = 0$ מחבר $-w$ הנגדי ב- V)

$$u = -w$$

משפט:

הבחון לתת-מרחב

אם $W \subseteq V$ (קבוצה חלקית במרחב לינארי V)

אז כדי ש- W יהיה תת מרחב מספיק שיתקיימו:

1. $W \neq 0$

2. שלכל $w_1, w_2 \in W$, $w_1 + w_2 \in W$ (סגירות לחיבור)

3. לכל $w \in W$ ולכל $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha w \in W$ (סגירות לכפל בסקלר)

אפשר לאחד את התנאים 2 ו-3 לתנאי אחד שהוא:

$$\alpha w_1 + \beta w_2 \in W \text{ לכל } w_1, w_2 \in W \text{ ולכל } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

שיעור 8-ב (10.12.09)

תת מרחבים

תזכורת: תת-מרחב W של מרחב לינארי V ,
היא קבוצה חלקית ל- V שהיא בעצמה מרחב לינארי ביחס לפעולות של V .

משפט: מבחן לתת-מרחב: W תת מרחב של מרחב לינארי V אם ורק אם

$$1. \quad W \neq \emptyset$$

2. W סגור לחיבור וכפל בסקלר.

$$(\text{לכל } w_1, w_2 \in W \text{ ולכל } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ , } \alpha \cdot w_1 + \beta \cdot w_2 \in W)$$

דוגמה 1: להוכיח שהקבוצה $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0\}$

היא מרחב לינארי ביחס לפעולות הרגילות של חיבור וכפל בסקלר.

פתרון: במקום להוכיח ש- W מקיים את כל 10 התכונות של הגדרת המרחב הלינארי,

נוכיח ש- W הוא תת מרחב של מרחב לינארי מוכר, $\mathbb{R}^3$,

ביחס לפעולות הרגילות.

נשתמש במבחן לתת-מרחב:

$$1. \quad W \neq \emptyset \quad ; \quad (0,0,0) \in W \quad (\text{בדיקה: } (0,0,0) \in \mathbb{R}^3 \text{ ו- } 0+2 \cdot 0-3 \cdot 0=0)$$

$$2. \quad \text{בניח ש- } (x_1, y_1, z_1) \in W \text{ , } (x_2, y_2, z_2) \in W$$

$$\text{אז } x_1 + 2y_1 - 3z_1 = 0 \text{ וגם } x_2 + 2y_2 - 3z_2 = 0$$

$$\text{לכן } (x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) - 3(z_1 + z_2) = 0$$

$$\text{ולכן } (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in W$$

$$\text{ולכן } (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \in W$$

$$\text{אם } (x, y, z) \in W \text{ אז } (x + 2y - 3z = 0)$$

$$\text{ולכן לכל } \lambda \in \mathbb{R} \text{ מתקיים } (\lambda x) + 2(\lambda y) - 3(\lambda z) = 0$$

$$\text{ . } \lambda(x, y, z) \in W \text{ ולכן } (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in W$$

לכן W תת מרחב של $\mathbb{R}^3$ ביחס לפעולות הרגילות.

ולכן הוא בעצמו מרחב.

דוגמה 2: $W = \{P(x) \in \mathbb{R}[x] \mid P(1) = P(2)\}$ ביחס לפעולות הרגילות:

דוגמה: $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3) + 7$ אז $P(1) = P(2) = 7$ לכן $P(x) \in W$

הוכחה: נוכיח ש- W תת מרחב של $\mathbb{R}[x]$ מרחב מוכר כלינארי.

1. $W \neq \emptyset$ כי פולינום האפס שייך ל- W .

2. נביח ש- $P(x), Q(x) \in W$ כלומר $P(1) = P(2), Q(1) = Q(2)$

אז לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ הפולינום $\alpha P(x) + \beta Q(x)$ מקיים:

$$\alpha P(1) + \beta Q(1) = \alpha P(2) + \beta Q(2)$$

$$\alpha P(x) + \beta Q(x) \in W \quad \text{לכן}$$

ולכן לפי מבחן לתת מרחב, W הוא תת מרחב של $\mathbb{R}[x]$ ולכן הוא מרחב.

משפט: אם A מטריצה מסדר $(n \times k)$ אז קבוצת פתרונות במערכת $Ax = 0$ כלומר $W = \{x \in \mathbb{R}^k \mid Ax = 0\}$ היא תת מרחב של $\mathbb{R}^k$ ביחס לפעולות הרגילות.

הוכחה:

1. $W \neq \emptyset$ כי $0 \in \mathbb{R}^k$ שייך ל- W כי $A0 = 0$

2. אם $x, y \in W$ אז $Ax = 0, Ay = 0$

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay = 0 \quad \text{לכן, לכל } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \text{גם}$$

$$\alpha x + \beta y \in W \quad \text{לכן}$$

מכאן ש- W תת מרחב של $\mathbb{R}^k$.

דוגמה: להוכיח ש- $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0\}$ היא מרחב לינארי ביחס לפעולות הרגילות.

$$W = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \right\} \quad \text{הוכחה:}$$

לפי המשפט הקודם, זה תת מרחב של $\mathbb{R}^3$.

התת-מרחב הנפרש על ידי קבוצה של וקטורים

http://en.wikipedia.org/wiki/Linear_span

[קבוצה פורשת](http://he.wikipedia.org/wiki/קבוצה_פורשת)

הגדרה: $v_1, v_2, \dots, v_k$ וקטורים במרחב לינארי V .
 כל וקטור מהצורה $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$ (כאשר $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$)
 ונקרא **צירוף לינארי** של $v_1, \dots, v_k$

הגדרה: נניח ש- $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ קבוצה של וקטורים במרחב לינארי V .
 אז הקבוצה הנפרשת ע"י A ב- V מוגדרת כך:

$$Sp(A) = span(A) = \{ \alpha_1 v_1, \alpha_2 v_2, \dots, \alpha_k v_k \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} \}$$

(זו קבוצת כל הצירופים הלינאריים של וקטורי A)

הערה: $Sp(0) = \{0\}$

$$Sp\{v\} = \{\alpha v \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

אם $v \neq 0$ אז $Sp\{v\}$ הוא "ישר" ב- V .

$$Sp\{u, v\} = \{\alpha u + \mu v \mid \alpha, \mu \in \mathbb{R}\}$$

אם $u, v \neq 0$ ולא נמצאים על אותו ישר אז $Sp\{u, v\}$ היא "מישור" ב- V .

משפט: אם V מרחב לינארי אז לכל קבוצה $A \subseteq V$, סופית ולא ריקה,
 אז הקבוצה הנפרשת ע"י A היא תת-מרחב של V .

הוכחה: נניח ש- $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$

אז $Sp(A) = \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \mid \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}$. אז:

1. $Sp(A) \neq \emptyset$ כי $0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_k = 0 \in Sp(A)$

2. אם $u, w \in Sp(A)$ אז קיימים סקלרים $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, $\beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{R}$,

$$u = \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i \quad w = \sum_{i=1}^k \beta_i v_i$$

אז לכל $\lambda u \in \mathbb{R}$,

$$\lambda u + \mu w = \lambda \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i v_i \right) + \mu \left(\sum_{i=1}^k \beta_i v_i \right) = \sum_{i=1}^k (\lambda \alpha_i + \mu \beta_i) v_i \in Sp(A)$$

ולכן לפי הבוחן לתת מרחב $Sp(A)$ תת מרחב של V .

תרגיל: להוכיח ש- $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0\}$ מרחב לינארי.

הוכחה:

$$\begin{aligned} V &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -2y + 3z\} = \{(-2y + 3z, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(-2, 1, 0) + z(3, 0, 1) \mid y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Sp}\{(-2, 1, 0), (3, 0, 1)\} \end{aligned}$$

מכאן שלפי המשפט הקודם, V הוא תת-מרחב של $\mathbb{R}^3$ ולכן מרחב לינארי.

תרגיל: להוכיח ש- $V = \{P(x) \in \mathbb{R}_2[x] \mid P(1) = 0\}$ הוא תת-מרחב של $\mathbb{R}_2[x]$ ע"י מציאת קבוצת A כך ש- $V = \text{Sp}(A)$.

[[כמובן ש- $V \subseteq \mathbb{R}_2[x]$, כקבוצה של פולינומים עד למעלה 2]]

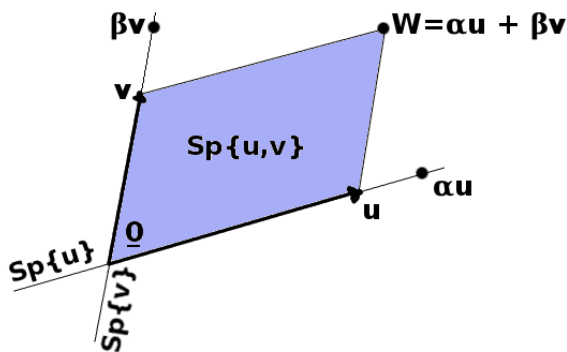
פתרון:

$$\begin{aligned} V &= \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_0 + a_1 + a_2 = 0\} \\ &= \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0 = -a_1 - a_2, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{-a_1 - a_2 + a_1x + a_2x^2 \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a_1(x-1) + a_2(x^2-1) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Sp}\{x-1, x^2-1\} \end{aligned}$$

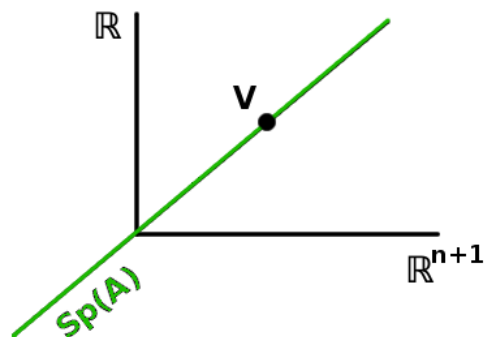
לכן V תת-מרחב של $\mathbb{R}_2[x]$.

הקשר בין A ל- $\text{Sp}(A)$

1. אם $v \in \mathbb{R}^n$ אז $\text{Sp}\{v\} = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ ישר ב- $\mathbb{R}^n$ (ציור 1)
2. אם $\{u, v\} \subseteq \mathbb{R}^n$ כשאר u, v אינם כפולה בסקלר זה של זה, אז $\text{Sp}\{u, v\} = \{\lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ מישור ב- $\mathbb{R}^n$ (ציור 2)



ציור 2



ציור 1

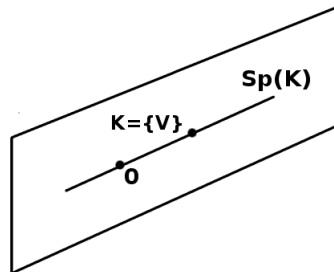
שיעור 9-א (15.12.09)

ראינו שאם $K = \{v_1 \dots v_n\}$ קבוצה לא ריקה של וקטורים במרחב לינארי V אז $Sp(K) = \{\alpha v_1 + \dots + \alpha_n v_n \mid \alpha_i \in \mathbb{R}\}$ הוא תת מרחב של V .

משפט: לכל קבוצה סופית $K \neq \emptyset$ של וקטורים במרחב V מתקיים:

1. $K \subseteq Sp(K)$

2. לכל תת מרחב W של V , אם $K \subseteq W$ אז $Sp(K) \subseteq W$ (במילים אחרות, $Sp(K)$ הוא התת מרחב ה"קטן" ביותר שמכילה את K).



הוכחה:

1. נסמן $K = \{v_1 \dots v_n\}$

אז $V_i = 0 \cdot v_1 + \dots + 1 \cdot v_i + 0 \cdot v_{i+1} + \dots + 0 \cdot v_n$ לכל $1 \leq i \leq n$
 לכן $v_i \in Sp(K)$ לכל $1 \leq i \leq n$ לכל $K \subseteq Sp(K)$

2. בניח ש- W תת מרחב ו- $K \subseteq W$

אז W סגור לחיבור וקטורים וכפל וקטורים בסקלר
 לכן, מאחר ש- $v_1, \dots, v_n \in W$ (כי $K \subseteq W$)
 נקבל ש- $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \in W$ לכל $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$
 לכן $Sp(K) \subseteq W$

טענה: אם $A, B \subseteq V$ קבוצות סופיות של וקטורים ואם $A \subseteq B$ אז $Sp(A) \subseteq Sp(B)$

הגדרה: $Sp(\emptyset) = \{0\}$

חיתוך של תת מרחבים

משפט: אם $U_1, U_2 \subseteq V$ הם תת מרחבים של מרחב לינארי V
אז גם $U_1 \cap U_2$ תת מרחב של V .

הוכחה: נשתמש בבוחן לתת-מרחב.

$$1. \quad 0 \in U_1 \text{ וגם } 0 \in U_2 \text{ לכן } 0 \in U_1 \cap U_2$$

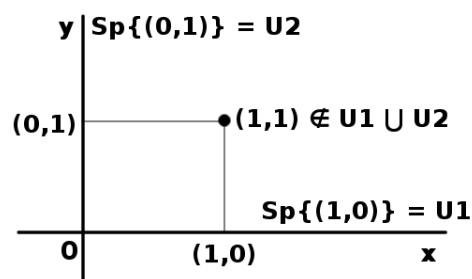
$$2. \quad \text{אם } v, w \in U_1 \cap U_2 \text{ אז } v, w \in U_1 \text{ וגם } v, w \in U_2$$

לכן $\alpha v + \beta w \in U_1$ וגם $\alpha v + \beta w \in U_2$ לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
(כי U_1 ו- U_2 תת-מרחבים).
לכן $\alpha v + \beta w \in U_1 \cap U_2$ לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
לכן $U_1 \cap U_2$ תת מרחב.

דוגמאות:

$$1. \quad \underbrace{\{P(x) \in \mathbb{R}[x] \mid P(1)=0\}}_{\text{זה תת מרחב של } \mathbb{R}[x]} \cap \underbrace{\{P(x) \in \mathbb{R}[x] \mid P(2)=0\}}_{\text{זה תת מרחב של } \mathbb{R}[x]} = \underbrace{\{P(x) \in \mathbb{R}[x] \mid P(1)=P(2)=0\}}_{\text{נובע שגם זה תת מרחב}}$$

$$2. \quad \underbrace{Sp\{(1,0,0,0), (0,1,0,0)\}}_{\text{תת מרחב של } \mathbb{R}^4} \cap \underbrace{Sp\{(0,0,1,0), (0,0,0,1)\}}_{\text{תת מרחב של } \mathbb{R}^4} = \{(0,0,0,0)\}$$



הערה: לא כל איחוד של שני תת-מרחבים הוא מרחב לינארי.
(למשל ב- $\mathbb{R}^2$, $Sp\{(1,0)\} \cup Sp\{(0,1)\}$ אינו תת מרחב
כי $(1,0), (0,1) \in Sp\{(1,0)\} \cup Sp\{(0,1)\}$
אבל $(1,0) + (0,1) = (1,1) \notin Sp\{(1,0)\} \cup Sp\{(0,1)\}$)

טענה: אם U_1, U_2 תת-מרחבים במרחב לינארי V
 אז $U_1 \cup U_2$ תת-מרחב אם ורק אם $U_1 \subseteq U_2$ או $U_2 \subseteq U_1$.

הוכחה: אם $U_1 \subseteq U_2$ או $U_2 \subseteq U_1$ אז $U_1 \cup U_2$ תת-מרחב.

להפך, נניח ש- $U_1 \cup U_2$ תת מרחב. צ"ל $U_1 \subseteq U_2$ או $U_2 \subseteq U_1$.
 אם נניח שזה לא נכון אז $U_1 \not\subseteq U_2$ וגם $U_2 \not\subseteq U_1$
 אז קיימים $u_1 \in U_1$ כך ש- $u_1 \notin U_2$ ו- $u_2 \in U_2$ כך ש- $u_2 \notin U_1$.
 אז $u_1, u_2 \in U_1 \cup U_2$ ומפני ש- $U_1 \cup U_2$ תת מרחב,
 נקבל ש- $u_1 + u_2 \in U_1 \cup U_2$
 ואז $u_1 + u_2 \in U_2$ או $u_1 + u_2 \in U_1$
 ואם $u_1 + u_2 \in U_1$ נקבל ש- $U_2 = \underbrace{(u_1 + u_2)}_{\in U_1} - \underbrace{u_1}_{\in U_1} \in U_1$ - סתירה.
 ואם $u_1 + u_2 \in U_2$ נקבל ש- $U_1 = \underbrace{(u_1 + u_2)}_{\in U_2} - \underbrace{u_2}_{\in U_2} \in U_2$ - שוב סתירה.
 לכן בהכרח $U_1 \subseteq U_2$ או $U_2 \subseteq U_1$.

סכום של תת-מרחבים

הגדרה: אם $U, W \subseteq V$ תת-מרחבים של מרחב V
 מסמנים $U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$

משפט: לכל U, W תת מרחבים של V מתקיים:

1. $U + W$ תת מרחב של V .
2. $W \subseteq V + W$, $U \subseteq V + W$
3. לכל תת מרחב L של V , אם $U \subseteq L$ וגם $W \subseteq L$ אז $V + W \subseteq L$
 (L היא התת מרחב הקטן ביותר שמכיל את V ואת W).

הוכחה:

1. להוכיח לבד (הבוחן לתת מרחב)
2. לכל $u \in U$ מתקיים $u = \underbrace{u}_{\in V} + \underbrace{0}_{\in W} \in V + W$ ולכן $U \subseteq V + W$
3. ברור מן הסגירות של L לגבי חיבור.

משפט:

נניח ש- $U, W \subseteq V$ תת מרחבים של V .
ונניח ש- $U = Sp(S)$ ו- $W = Sp(T)$ (קבוצות של וקטורים ב- V)
אז $U + W = Sp(S \cup T)$

הוכחה:

$Sp(S) \subseteq Sp(S \cup T)$ לכן $S \subseteq S \cup T$
 $Sp(T) \subseteq Sp(S \cup T)$ לכן $T \subseteq S \cup T$
לכן $Sp(S \cup T)$ מכיל את U וגם את V
לכן לפי משפט הקודם (חלק 3) $U + W \subseteq Sp(S \cup T)$ * (1)

להפך:

$S \subseteq Sp(S) = U \subseteq U + W$
 $T \subseteq Sp(T) = W \subseteq U + W$
לכן $S \cup T \subseteq U + W$
מאחר ש- $U + W$ הוא תת-מרחב שמכיל את $S \cup T$
הוא מכיל גם את $Sp(S \cup T)$
כלומר $Sp(S \cup T) \subseteq U + W$ * (2)
משתי ההכללות (*1,2) נובע שוויון.

סכום ישר של תת מרחבים

הגדרה:

נניח ש- $U, W \subseteq V$ תת מרחבים של V .
נאמר שתת-מרחב L הוא **הסכום הישר** של U ו- W
אם $L = U + W$ ובנוסף $U \cap W = \{0\}$
מסמנים אז $L = U \oplus W$

משפט:

L הוא סכום ישר של U ו- W אם ורק אם לכל וקטור של L
יש הצגה יחידה מהצורה $u + w$, כשאר $u \in U$ ו- $w \in W$

הוכחה:

נניח קודם ש- $L = U \oplus W$
אז לכל $v \in L$ יש הצגה מהצורה $v = u + w$ כשאר $u \in U, w \in W$
(יש הצגה כזו כי $L = U + W$)
נניח שבנוסף $v = u' + w'$ כשאר $u' \in U, w' \in W$ אז $u + w = u' + w'$
ואז $\underbrace{u - u'}_{\in U} = \underbrace{w' - w}_{\in W}$

$$u-u', w-w' \in U \cap W = \{0\} \quad \text{ולכן}$$

$$u=u' \quad \text{ולכן} \quad w=w'$$

וזה מוכיח את יחידות ההצגה.

להפך, נניח שלכל וקטור ב- $L=U+W$ יש הצגה יחידה מהצורה $u+w$

כאשר $u \in U, w \in W$. צ"ל ש- $L=V \oplus W$ כלומר $U \cap W = \{0\}$.

לשם כך נניח $v \in U \cap W$

$$v = \underbrace{v}_{\in U} + \underbrace{0}_{\in W} = \underbrace{0}_{\in U} + \underbrace{v}_{\in W} \quad \text{אז}$$

מיחידות ההצגה נובע ש- $v=0$. מ.ש.ל.

מרחבים נוצרים סופיות

הגדרה: נאמר שמרחב לינארי V נוצר סופית

אם קיימת קבוצת סופית של וקטורים $K \subseteq V$ כך ש- $V = Sp(K)$.

דוגמאות:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0) + y(0,1) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = Sp\{(1,0), (0,1)\} \quad 1.$$

ולכן $\mathbb{R}^2$ נוצר סופית. $\{(1,0), (0,1)\}$ הקבוצה יוצרת אותו).

$$\mathbb{R}_n[x] = \{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}\} = Sp\{1, x, x^2, \dots, x^n\} \quad 2.$$

ולכן זה מרחב נוצר סופית.

$$\mathbb{R}[x] = \{P(x) \mid P(x) \text{ פולינום}\} \quad 3.$$

זה לא מרחב נוצר סופית.

לכל קבוצה סופית K של פולינומים, ניתן למצוא מעלה גדולה ביותר של x

המופיע בתוך הפולינומים של K . נסמן אותה ב- m .

אז $Sp(K)$ מכילה פולינומים ממעלה m לכל היותר.

לכן $x^{m+1} \notin Sp(K)$ ולכן $Sp(K)$ לא שווה ל- $\mathbb{R}[x]$

מכאן שלא קיימת קבוצה סופית K היוצרת את $\mathbb{R}[x]$.

$$M_{2 \times 3}^{\mathbb{R}} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{R} \right\} = Sp\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad 4.$$

נוצר סופית.

שיעור 9-ב (17.12.09)

משפט:

נניח ש- T קבוצה סופית של וקטורים במרחב לינארי V .
אם S מתקבלת מ- T על ידי פעולות אלמנטריות (על וקטור T)
אז $Sp(S) = Sp(T)$
(פעולות אלמנטריות על קבוצה פורשת אינו משנה את התת-מרחב הנפרש).

הוכחה:

נסמן $T = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ נוכיח ש-

1. $Sp\{v_2, v_1, v_3, \dots, v_n\} = Sp\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$
2. $\lambda \neq 0, Sp\{\lambda v_1, v_2, \dots, v_n\} = Sp\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$
3. $Sp\{v_1 + \lambda v_2, v_2, \dots, v_n\} = Sp\{v_1, \dots, v_n\}$

מכאן:

1. זה ברור. כל איבר ב- A קיים ב- B וגם בכיוון השני.
2. נניח ש- $v \in Sp\{\lambda v_1, V_2, \dots, V_n\}$ אז קיימים סקלרים $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$
כך ש- $v = \alpha_1(\lambda V_1) + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_n V_n$
לכן $v = \alpha_1(\lambda) V_2 + \alpha V_2 + \dots + \alpha_n V_n \in Sp\{V_1, \dots, V_n\}$
(כי v צירוף לינארי של $V_1 \dots V_n$)
לכן $Sp\{\lambda V_1, V_2, \dots, V_n\} \subseteq Sp\{V_1, \dots, V_n\}$
להפך נניח $v \in Sp\{V_1 \dots V_n\}$
כלומר קיימים סקלרים $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ כך ש- $v = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_n V_n$
אז $v = \frac{\alpha}{\lambda}(\lambda V_1) + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_n V_n$ (מותר, כי $\lambda \neq 0$)
לכן v צירוף לינארי של $\lambda V_1, V_2, \dots, V_n$
ולכן $v \in Sp\{\lambda V_1, V_2, \dots, V_n\}$
מכאן נקבל את ההכלה ההפוכה ואת השוויון.

הוכחה אחרת: (ל-2)

$$\begin{aligned} & (\lambda V_1 = \lambda V_1 + 0V_2 + \dots + 0V_n \text{ למשל } \lambda V_1, V_2, \dots, V_n \in Sp\{V_1, \dots, V_n\}) \\ & \underbrace{\{\lambda V_1, V_2, \dots, V_n\}}_{\text{קבוצה}} \subseteq \underbrace{Sp\{V_1, \dots, V_n\}}_{\text{תת מרחב}} \quad \text{לכן} \\ & Sp\{\lambda V_1, V_2, \dots, V_n\} \subseteq Sp\{V_1, \dots, V_n\} \quad \text{ולכן} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{ולאחר, } V_1, V_2, \dots, V_n \in Sp\{\lambda V_1, V_2, \dots, V_n\} \text{ כי } V_1 = \frac{1}{\lambda}(\lambda V_1) + 0V_2 + \dots + 0V_n \\ & \underbrace{\{V_1, \dots, V_n\}}_{\text{קבוצה}} \subseteq \underbrace{Sp\{\lambda V_1, V_2, \dots, V_n\}}_{\text{תת מרחב}} \quad \text{לכן} \\ & Sp\{V_1, V_2, \dots, V_n\} \subseteq Sp\{\lambda V_1, V_2, \dots, V_n\} \quad \text{ולכן} \end{aligned}$$

$$\{V_1 + \lambda V_2, V_2, \dots, V_n\} \subseteq Sp\{V_1, V_2, \dots, V_n\} \quad 3.$$

$$\begin{aligned} & \text{ברור שכל וקטור באגף הימין הוא צירוף לינארי של } V_1, \dots, V_n \\ & \text{לכן } Sp\{V_1 + \lambda V_2, V_2, \dots, V_n\} = Sp\{V_1, V_2, \dots, V_n\} \\ & = \{\alpha_1 V_1 + \dots + \alpha_n V_n \mid V_1, \dots, V_n \in \mathbb{R}\} \\ & (\quad V_1 + \lambda V_2 = 1V_1 + \lambda V_2 + 0V_3 + \dots + 0V_n \quad) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{V_1, V_2, \dots, V_n\} \subseteq Sp\{V_1 + \lambda V_2, V_2, \dots, V_n\} \quad \text{להפך,} \\ & \text{כי } V_1 = 1 \cdot (V_1 + \lambda V_2) - \lambda V_2 + 0V_3 + \dots + 0V_n \text{ (לגבי } V_2, \dots, V_n \text{ לא ברור)} \\ & \text{לכן } Sp\{V_1, V_2, \dots, V_n\} \subseteq Sp\{V_1 + \lambda V_2, V_2, \dots, V_n\} \\ & \text{ממשיכי ההכללות נובע בשוויון.} \end{aligned}$$

לכן, מפני שכל פעולה אלמנטרית על קבוצה פורשת אינה משנה את התת מרחב הנפרש, נובע שאם S מתקבלת מ- T ע"י סדרת פעולות האלה אז עדיין $Sp(S) = Sp(T)$

דוגמאות:

$$1. \quad \text{ב- } \mathbb{R}_2[x]$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{R}_2[x] \text{ של } Sp\{x^2 + x + 2, x + 1, x^2 - 1, x + 3\} - \text{זה תת מרחב של} \\ & \text{הכל מתקבלת מן המשפט שמבטיח שפעולות אלמנטריות לא משנות את התת מרחב הנפרש.} \\ & = Sp\{x^2 + 1, x + 1, x^2 - 1, x + 3\} = Sp\{2, x + 1, x^2 - 1, x + 3\} \\ & = Sp\{1, x + 1, x^2 - 1, x + 3\} = Sp\{1, x, x^2, x\} = Sp\{1, x, x^2, 0\} = Sp\{1, x, x^2\} \\ & = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}_2[x] \end{aligned}$$

2. ב- $\mathbb{R}^4$

$Sp\{(1,0,-1,1), (2,1,1,1), (3,0,1,2), (4,0,0,3)\}$
 נפרש ע"י הקבוצה המתקבלת מדירוג המטריצה
 ששורותיה הן ארבעת הוקטורים הנתונים.
 (כך נקבל קבוצה פורשת מדורגת)

הערה: נניח שנתון תת-מרחב הנפרש ע"י קבוצה סופית של וקטורים T .

$$W = Sp(T)$$

ראינו שניתן לעבור מ- T לקבוצה פורשת יותר "חסרונית"
 שאין בה שהוא צירוף לינארי של האחרים.

linearly dependent

הגדרה: נאמר שקבוצת וקטורים $v_1, v_2, \dots, v_k$ במרחב לינארי V היא **תלויה לינארית**

אם קיימים סקלרים $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ לא כולם 0 כך ש- $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$

(במילים אחרות $v_1 \dots v_n$ תלויה לינארית)

אם קיים צירוף לינארי לא טריביאלי של וקטורים בקבוצה השווה ל-0).

(למשל v_1 צירוף לינארי של $v_1 \dots v_n$, כלומר: $0 = (-1) \cdot v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$)

הערות:

1. אם $n \geq 2$ אז התנאי שהגדרה הנ"ל מבטיח שקיים וקטור בקבוצה

שהוא צירוף לינארי של האחרים.

הוכחה: לפי ההנחה יש $1 \leq k \leq n$ כך ש- $\alpha_k \neq 0$ ו- $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$

$$-\alpha_k v_k = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{k-1} v_{k-1} + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n$$

$$v_k = \frac{-\alpha_1}{\alpha_k} v_1 + \dots + \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} v_{k-1} + \dots + \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} v_{k+1} + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha_k} v_n$$

ולכן v_k צירוף לינארי של האחרים.

2. אם $n=1$ אז $\{v_1\}$ תלוי לינארית כאשר קיים סקלר $\alpha_1 \neq 0$

כך ש- $\alpha_1 v_1 = 0$ ואז $v=0$

לכן הקבוצה היחידה בת וקטור אחד בלבד שהיא תלוי לינארית היא $\{0\}$

http://en.wikipedia.org/wiki/Linear_independence
<http://he.wikipedia.org/wiki/לינארית>

3. כל קבוצה שמכילה את וקטור האפס היא תלוי לינארית.

הסבר: $\{0, v_2, \dots, v_n\}$ תלוי כי $0 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n$ (יש צירוף לינארי שלא כל מקדמיו אפסים השווה לוקטור האפס).

הגדרה: נאמר שקבוצת וקטורים $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ במרחב לינארי V היא **בלתי תלויה**

אם לכל $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ השוויון $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ גורר ש- $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

(הצירוף הלינארי היחיד של וקטורי הקבוצה השווה לוקטור האפס הוא הצירוף הטריביאלי).

דוגמאות:

1. $\{(1, -1, 0, 1), (1, -1, 0, 2), (1, 1, 1, 2)\}$ הוא בלתי תלוי ב- $\mathbb{R}^3$

הסבר: נניח $x_1(1, -1, 0, 1) + x_2(1, -1, 0, 2) + x_3(1, 1, 1, 2) = (0, 0, 0, 0)$ (נבדוק שכל המקדמים אפסים)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right] \quad \text{לכן צריך לדרג את} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{זה שקול ל-}$$

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0 \quad \text{מקבלים}$$

לכן הקבוצה בלתי תלויה.

משפט:

נניח ש- $V \neq \{0\}$ מרחב לינארי נוצר סופית.
אז קיימת קבוצה סופית בלתי תלויה לינארית הפורשת את V .

הוכחה:

לפי הנתון קיימת קבוצה סופית $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ של וקטורים ב- V
כך ש- $V = Sp\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. אם $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ב"ת אז גמרנו.

נניח ש- $n \geq 2$. אם $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ תלויה אז ניתן למשל להניח ש- v_n
הוא צירוף לינארית של האחרים

ולכן קיימים $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ כך ש- $v_n = \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{n-1} v_{n-1}\}$.

אז $Sp\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = Sp\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, \underbrace{v_1 + \dots + \alpha_{n-1} v_{n-1}}_{v_n}\} = Sp\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$

(פעולות אלמנטריות על הקבוצה הפורשת לא משנות את התת מרחב הן פרש)

ואזכשו להמשיך ולסלק וקטורים מן הקבוצה הפורשת

עד שנגיע לקבוצה בלתי תלויה (כפי שרצינו)

עד ש- $n=1$ אז $V = Sp\{v_1\}$ אז $v_1 \neq 0$ כי $V \neq \{0\}$

ואז $\{v_1\}$ הוא בלתי תלויה והיא כמובן פורשת את V . מ.ש.ל.

שיעור 10-א (22.12.09)

(באדיבות עידו פישלר)

תזכורת: הוכחנו שלכל מרחב נוצר סופית יש קבוצה סופית בלתי תלויה הפורשת אותו.

טענה: נניח ש- $\{v_1, \dots, v_n\}$ קבוצה בלתי תלויה של וקטורים במרחב לינארי V . בנוסף,

נניח $v \in \text{Sp}\{v_1, \dots, v_n\}$. אז ל- v יש הצגה יחידה כצירוף לינארי של $\{v_1, \dots, v_n\}$

הוכחה: לפי ההנחה $v \in \text{Sp}\{v_1, \dots, v_n\}$.

לכן קיימים סקלרים $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ כך ש- $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$.

לכן v צירוף לינארי של $\{v_1, \dots, v_n\}$

נניח ש- $v = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$ כאשר $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$

אז $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$

מאחר ו- $\{v_1, \dots, v_n\}$ בלתי תלויה נקבל ש- $\alpha_1 - \beta_1 = \dots = \alpha_n - \beta_n = 0$.

לכן $\alpha_i = \beta_i$ לכל $1 \leq i \leq n$ ולכן ההצגה היא יחידה. מ.ש.ל.

הקשר בין קבוצות בלתי תלויות שפורשות אותו מרחב לינארי

(* בגדול: הגובל של קבוצות בלתי תלויות שפורשות מרחב לינארי שווה)

משפט עזר: נניח ש- $\{v_1, \dots, v_n\}$ קבוצה שפורשת את המרחב הלינארי V

אז כל קבוצה של m וקטורים ב- V כאשר $m > n$ היא תלויה לינארית.

(כלומר, יש בה וקטורים "מיותרים" לפריסה)

הוכחה: נניח ש- $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ וקטורים ב- V ו- $m > n$.

לפי הנתון, כל אחד מן הוקטורים האלו הוא צירוף לינארי של $v_1, \dots, v_n$.

כלומר $w_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} v_i$ לכל $1 \leq j \leq m$.

כל צירוף לינארי של $\{w_1, \dots, w_m\}$ הוא וקטור מהצורה:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m x_j w_j &= \sum_{j=1}^m x_j \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} v_i \right) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} x_j v_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \alpha_{ij} x_j \right) v_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m x_j \alpha_{ij} \right) v_i \end{aligned}$$

לא תלוי ב- j

המשך בדף הבא

לכן $\sum_{j=1}^m x_j w_j = 0$ כאשר $\sum_{j=1}^m \alpha_{ij} x_j = 0$ לכל $1 \leq i \leq n$.

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{זה שקול ל-}$$

זו מערכת הומוגנית ב- m נעלמים כאשר $m > n$.
למערכת זו יש אינסוף פתרונות

ובפרט יש פתרון לא טריביאלי $(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$

לכן קיימים $x_1 \dots x_m$ אשר לא כולם אפסים כך ש- $\sum_{j=1}^m x_j w_j = 0$.

ולכן $\{w_1 \dots w_n\}$ היא תלויה לינארית. מ.ש.ל.

בסיסים

הגדרה:

נניח ש- V מרחב נוצר סופית.

נאמר שקבוצת וקטורים $B = \{v_1 \dots v_n\}$ היא **בסיס של V**

אם B היא קבוצה בלתי תלויה שפורשת את V .

הערה:

לפי ההגדרה הנ"ל, למרחב $\{0\}$ אין בסיס.

ניתן לחשוב על $\emptyset$ כבסיס שלו.

דוגמאות:

$$E = \{ \underbrace{(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, 0, \dots, 1)}_{n \text{ וקטורים ב- } \mathbb{R}^n} \} \quad .1$$

זה בסיס ל- $\mathbb{R}^n$. נקרא **הבסיס הסטנדרטי** של $\mathbb{R}^n$

$$\{(2, 3), (e, \pi)\} \text{ בסיס של } \mathbb{R}^2. \quad .2$$

$$\{1, x, x^2, \dots, x^n\} \text{ בסיס למרחב הפולינומים } \mathbb{R}_n[x] \quad .3$$

משפט:

אם V מרחב לינארי נוצר סופית אז ל- V יש בסיס ולכל שני בסיסים של V יש אותו מספר וקטורים.

הוכחה:

אם V נוצר סופית אז קיימת קבוצה סופית שפורשת אותו. ולפי משפט קודם אפשר להגיע ממנה לקבוצה פורשת שהיא בלתי תלויה, כלומר, בסיס של V .

נניח ש- B_1, B_2 בסיסים.

אז B_1, B_2 פורשים את V והם בלתי תלויים.

נסמן $n = |B_1|$ ו- $m = |B_2|$.

אם $m > n$ אז לפי המשפט הקודם B_2 תלויה (כי B_1 פורשת) וזו סתירה להנחה. לכן $m \leq n$

באופן דומה נקבל ש- $m \geq n$ ולכן נגיע לזה ש- $m = n$ כלומר $|B_1| = |B_2|$.

הגדרה:

אם B בסיס של מרחב לינארי V ואם $n = |B|$ נאמר שהממד של V היא n ונסמן $\dim V = n$

משפט:

אפיון נוסף של בסיס

נניח ש- V מרחב לינארי ו- B קבוצה של וקטורים ב- V .

1. B בסיס אם"ם B קבוצה בלתי תלויה (כל קבוצה ממש של B היא תלויה)

2. B בסיס אם"ם B קבוצה פורשת מינימלית (כל קבוצה שחלקית לה ממש לא פורשת)

הוכחה:

1. אם B בסיס אז B ב"ת ופורשת. כל קבוצה שמכילה אותה ממש היא תלויה (לפי משפט העזר) ולכן B ב"ת מקסימלית.

ולהפך: נניח ש- B היא בלתי תלויה מקסימלית

צ"ל ש- B בסיס ולשם כך די קל להוכיח שהיא פורשת. (ממשיך..)

נניח ש- $v \in V$. צ"ל ש- $v \in Sp(B)$.
 נניח בשלילה ש- v לא צירוף לינארי של אברי V . $v = \{v_1 \dots v_n\}$
 נראה ש- $\{v_1 \dots v_n, v\}$ היא בלתי תלויה.
 נניח ש- $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_v \in \mathbb{R}$ כך ש- $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + \alpha_v v = 0$
 (נוכיח שכל מקדמים הצירוף אפסים)

אם $\alpha \neq 0$ נוכל לרשום $v = \frac{\alpha_1}{\alpha} v_1 \dots \frac{\alpha_n}{\alpha} v_n$
 כלומר v צירוף לינארי של אברי B - סתירה להנחה, ולכן $\alpha = 0$.
 מכאן ש- $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ מאחר ש- $\{v_1 \dots v_n\}$ ב"ת.
 נקבל ש- $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$
 לכן מ- $*$ נובע ש- $\alpha_1 = \alpha_n = \alpha = 0$
 ולכן $\{v_1 \dots v_n\}$ ב"ת מקסימלית.
 סתירה זו מראה ש- $v \in Sp\{v_1 \dots v_n\}$ (זה נכון לכל $v \in V$)
 לכן $\{v_1 \dots v_n\}$ פורשת והיא בסיס של V .

2. צ"ל שאם B בסיס אז B קבוצה פורשת מינימלית ולהפך.

($\Leftarrow$) נניח ש- B בסיס אז B פורשת אם B אינה מינימלית.
 נקבל שקיימת קבוצה $B' \subset B$ כך ש- B' פורשת את V .
 אבל אז לפי משפט העזר B תלויה. סתירה להנחה ש- B בסיס.

($\Rightarrow$) נניח ש- B פורשת מינימלית. צ"ל ש- B בסיס.
 מה שנשאר להוכיח ש- B בלתי תלויה. נסמן $B = \{v_1 \dots v_n\}$
 אם $n=1$ אז $B = \{v_1\}$ אז אם $v_1 = 0$ נקבל ש- $v = \{0\}$ ואז אין בסיס.
 לכן $v_1 \neq 0$ ולכן B קבוצה ת"ת.
 אם $n \geq 2$ ואם נניח בשלילה שהיא תלויה לינארית אז קיים וקטור ב- B
 שהיא צירוף לינארי של האחרים. לכן ניתן להניח שלמשל
 $Sp\{v_1 \dots v_n\} = Sp\{v_1 \dots v_{n-1}\}$ ואז $v_n = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{n-1} v_{n-1}$
 וזו סתירה להנחה ש- $\{v_1 \dots v_n\}$ פורשת מינימלית.
 לכן $\{v_1 \dots v_n\}$ ב"ת ולכן B בסיס.

משפט:

נניח ש- V מרחב לינארי ממימד n . אז:

1. כל קבוצה ב"ת שבה יש n וקטורים היא בסיס.
2. כל קבוצה פורשת שבה יש n וקטורים היא בסיס.

הוכחה:

1. נניח ש- B קבוצה בלתי תלויה ומספר הוקטורים בה הוא n .
אם היא לא פורשת את V אז קיים וקטור $v \in V$ כך ש- $v \notin \text{Sp}(B)$
אז $B \cup \{v\}$ קבוצה בלתי תלויה שיש בה $n+1$ וקטורים.
אבל לפי ההנחה יש ל- V בסיס של n וקטורים כלומר קבוצה פורשת של n וקטורים. ואז כל קבוצה בת $n+1$ וקטורים היא תלויה ולכן B בסיס.
2. אם B פורשת ולא בסיס אז היא תלויה לינארית.
לכן יש לה קבוצה חלקית ממש (שבה פחות וקטורים) שפורשת את V .
אבל בכל בסיס של V (שיש בו n וקטורים לפי ההנחה)
יש יותר וקטורים מאשר בקבוצה הפורשת הנ"ל,
ואז לפי משפט העזר, נקבל שלכל בסיס כזה הוא קבוצה תלויה - סתירה.
לכן B בלתי תלויה ולכן בסיס.

שיעור 10-ב (24.12.09)

תרגיל: הוכח שקבוצה $W = \left\{ \begin{pmatrix} a-b & c \\ c+d & 2b-2a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$

היא מרחב לינארית ולמצוא בסיס ל-W.

תשובה: W חלקי ל- $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ שידוע כמרחב לינארי.

שזה, אגב, מרחב לינארי מממד 4 כי $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ בסיס שלו.

כל מטריצה $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ יש הצגה יחידה מהצורה

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ כלומר } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

פורשת את $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. קבוצה זו היא בלתי תלויה כי אם נניח ש-

$$a=b=c=d=0 \text{ ולכן } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ אז } a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נחזור לפתרון השאלה...

$$W = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

(פעולות על קבוצה לא משנה את התת מרחב הנפרש על ידה, לכן...)

$$= Sp \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} = Sp \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

לכן w תת מרחב של $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ ולכן הוא מרחב לינארי

והקבוצה $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ פורשת אותו. (מכאן ש- $\dim W \leq 3$)

נבדוק האם הקבוצה הנ"ל ב"ת.

לשם כך נניח ש- $a, b, c \in \mathbb{R}$ ו- $\begin{pmatrix} a & b \\ b+c & -2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ומכאן ש- $a=b=c=0$.

לכן הקבוצה שמצאנו היא גם בלתי תלויה ולכן בסיס של W, ולכן $\dim W = 3$.

שאלה: נניח ש- $\{v_1, v_2, v_3\}$ קבוצה של וקטורים במרחב לינארי V . הוכח או הפרך:

1. אם הקבוצה תלויה לינארית אז v_1 צירוף לינארי של האחרים.
2. אם v_1 צירוף לינארי של v_2, v_3 אז גם v_2 צירוף לינארי של v_1, v_3 .
3. אם $v_1 \notin \text{Sp}\{v_2, v_3\}$ אז $\{v_1, v_2, v_3\}$ בלתי תלויה.
4. אם $v_1 \notin \text{Sp}\{v_2, v_3\}$ ו- $v_1 \notin \text{Sp}\{v_1, v_3\}$ אז $\{v_1, v_2, v_3\}$ בלתי תלויה.

תשובות:

1. לא נכון. למשל הקבוצה $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,2,0)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$ תלוי לינארית אבל v_1 לא צירוף לינארי של האחרים.
2. לא נכון. נניח $\{ \overbrace{(1,0,0)}^{v_1}, \overbrace{(0,1,0)}^{v_2}, \overbrace{(2,0,0)}^{v_3} \}$ אז $v_1 = 0 \cdot v_2 + \frac{1}{2} v_3$ אבל v_2 לא צירוף לינארי של v_1, v_3 .
3. לא נכון. $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,2,0)\}$ קבוצה תלויה למרות ש- $v_1 \notin \text{Sp}\{v_2, v_3\}$.
4. לא. נניח למשל $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,0)\}$ אז $v_1 \notin \text{Sp}\{v_2, v_3\}$, $v_2 \notin \text{Sp}\{v_1, v_3\}$ אבל הקבוצה תלויה כי היא מכילה את וקטור האפס.

משפט: נניח ש- V מרחב נוצר סופית ו- U תת מרחב שלו. אז:

1. $\dim U \leq \dim V$ ו- U נוצר סופית ו-
2. אם $\dim U = \dim V$ אז $U = V$

הוכחה:

1. מאחר ש- V נוצר סופית קיים בסיס סופי של V .
נניח ש- $\dim V = n$
אם $U = \{0\}$ אז ברור ש- U נוצר סופית כי $U = \text{Sp}\{0\}$
נניח ש- $U \neq \{0\}$ אז קיים $0 \neq u_1 \in U$
אם $U = \text{Sp}\{u_1\}$ אז ברור ש- U נוצר סופית.
אם $U \neq \text{Sp}\{u_1\}$ אז קיים $u_2 \in U$ כך ש- $u_2 \notin \text{Sp}\{u_1\}$

אז $Sp\{u_1, u_2\} \subseteq U$
 אם $Sp\{u_1, u_2\} = U$ גמרנו.

אחרת קיים $u_3 \in U$ כך ש- $u_3 \notin Sp\{u_1, u_2\}$ וכו' הלאה...
 הטענה כי בשלב k מקבלים קבוצה $\{u_1, \dots, u_k\} \subseteq U$ כך ש- $u_1 \notin Sp\{u_1, \dots, u_{i-1}\}$ לכל $i=2..k$
 הטענה היא שקבוצה זו היא בלתי תלויה ולכן התהליך חייב להסתיים כעבור n צעדים לכל היותר מפני שמרחב V שממדו b כל קבוצה של יותר מ- n וקטורים היא תלויה.

מסקנה: ניתן למצוא ל- U קבוצה פורשת וב"ת $\{u_1, \dots, u_k\}$
 כך ש- $U = Sp\{u_1, \dots, u_k\}$ ו- $k \leq n$
 לכן U נוצר סופית ו- $\dim U \leq \dim V$

2. נניח ש- $n = \dim U = \dim V$ אז קיים בסיס $\{u_1, \dots, u_n\}$ של V .
 מאחר שזו קבוצת בלתי תלויה בעלת n וקטורים במרחב V שמימד בו שווה ל- n .
 נובע ש- $\{u_1, \dots, u_n\}$ היא גם בסיס של V .
 לכן $V = Sp\{u_1, \dots, u_n\} = U$

טענה: אם $\{u_1, \dots, u_k\}$ קבוצת וקטורים $0 \neq$ במרחב לינארי V .
 ואם לכל $2 \leq j \leq k$, $u_j \notin Sp\{u_1, \dots, u_{j-1}\}$, אז $\{u_1, \dots, u_k\}$ בלתי תלויה.

הוכחה: נניח ש- $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ סקלרים כך ש- $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_k u_k = 0$
 (צ"ל $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$)

אם נניח שיש סקלר שונה מ-0 בין $\alpha_1 \dots \alpha_k$
 אז קיים j גדול ביותר כך ש- $\alpha_j \neq 0$ (אז $\alpha_i = 0$ לכל $j < i \leq k$)
 לכן $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_j u_j = 0$ כאשר $\alpha_j \neq 0$

אם $j \geq 2$ נקבל מכאן ש- $u_j \in Sp\{u_1, \dots, u_{j-1}\}$
 (ע"י העברת אגפים וחילוק ב- α_j) -- סתירה לנתון.
 לכן $j=1$ ולכן $\alpha_1 u_1 = 0$ כאשר $\alpha_1 \neq 0$ ולכן $u_1 = 0$ -- סתירה)

הסתירה מראה ש- $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$
 לכן הקבוצה $\{u_1, \dots, u_k\}$ בלתי תלויה.

תרגיל: נניח ש- V מרחב לינארי מממד n ו- U תת מרחב שלו כך ש- $\dim U = n-1$. (1)
 נניח ש- $v \in V$ ו- $v \notin U$.
 הוכח ש-
 הוא תת מרחב שווה ל- V .

תשובה: לפי הנתון $\dim U = n-1$ לכן קיים בסיס $\{u_1, \dots, u_{n-1}\}$ של U .
 לפי הנתון $U = \text{Sp}\{u_1, \dots, u_{n-1}\}$ ואז $v \notin U$ היא ב"ת.
 כי כל וקטור בקבוצה אינו צירוף לינארי של קודמיו וכל וקטור בקבוצה שונה מ-
 0. לכן $\{u_1, \dots, u_{n-1}, v\}$ קבוצה בתלי תלויה ב- V שמידו n לכן היא בסיס של V .

קבוצה זו חלקית ל- $\text{Sp}(U \cup \{u\})$
 ולכן $V = \text{Sp}\{u_1, \dots, u_{n-1}, v\} \subseteq \text{Sp}(U \cup \{u\}) \subseteq V$ ומכאן השוויון כנדרש.

משפט: במרחב לינארי נוצר סופית כל קבוצה בלתי תלויה ניתן להשלים לבסיס.

הוכחה: נניח ש- V נוצר סופית ו- $\dim V = n$ ונניח ש- $\{u_1, \dots, u_k\}$ בלתי תלויה ב- V .
 אם $\text{Sp}\{u_1, \dots, u_k\}$ אז $\{u_1, \dots, u_k\}$ בסיס.
 אחרת קיים $v_1 \in V$ כך ש- $v_1 \notin \text{Sp}\{u_1, \dots, u_k\}$
 ואז $\{u_1, \dots, u_k, v_1\}$ בלתי תלויה.
 נעבור $n-k$ צעדים דומים נגיע לקבוצה ב"ת בעלת n וקטורים ב- V
 כלומר לבסיס של V מכיל את $\{u_1, \dots, u_k\}$

הערה: הטענה "שאם $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס ל- V ואם V תת מרחב של U
 אז קיימת קבוצה חלקית ל- V שהיא בסיס ל- U " היא לא נכונה.
 דוגמה נגדית:

$$B = \{(1,0), (0,1)\} \text{ בסיס ל- } \mathbb{R}^2$$

אבל אין בו שום קבוצה חלקית שהיא בסיס ל- $U = \text{Sp}\{(1,1)\}$.
 (2)

$$\text{Sp}(B) = \mathbb{R}^2 \text{ למרות ש-}$$

שיעור 11-א (29.12.09)

(רב תודות לנעה בן-צבי)

מרחבים לינאריים הקשורים למטריצות

טענה: אם $v_1, v_2, \dots, v_k$ קבוצה מדורגת של וקטורים ב- $\mathbb{R}^n$ אז $\{v_1, \dots, v_k\}$ קבוצה בלתי תלויה.

הוכחה: לפי ההנחה ניתן להניח כי $v_1 = (0, 0, \dots, d_{i1}, \dots)$ כאשר $d_{i1} \neq 0$ ($i1$ הוא המקום הראשון ב- v_1 שבו יש רכיב שונה מ-0)
 $d_{i2} \neq 0$ כאשר $v_2 = (0, \dots, 0, d_{i2}, \dots)$
 $d_{ik} \neq 0$ כאשר $v_k = (0, 0, 0, \dots, d_{ik}, \dots)$
 לפי ההנחה $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ כי הקבוצה מדורגת
 אז $k \leq n$ כי יש k מקומות שונים בתוך n קואורדינטות אפשריות
 וזה ינבע גם מהאי-תלול של $v_1, \dots, v_k$ ב- $\mathbb{R}^n$.

נניח כי $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$
 אז הרכיב $i1$ של וקטור זה הוא $\alpha_1 d_{i1}$ ולכן $\alpha_1 d_{i1} = 0$
 מאחר ש- $d_{i1} \neq 0$ נקבל כי $\alpha_1 = 0$.

מ- $\alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = 0$ נובע כי
 אבל אז ברכיב ה- $i2$ של וקטור זה נקבל כי $\alpha_2 d_{i2} = 0$ אבל $d_{i2} \neq 0$ ולכן $\alpha_2 = 0$
 באופן דומה מקבלים $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$ ולכן $\{v_1, \dots, v_k\}$ בלתי תלויה.

הגדרה: נניח כי A מטריצה מסדר $k \times n$
 מסמנים $R(A) = \{\text{המרחב הנפרש על ידי שורות } A\}$ - נקרא **מרחב השורות** של A .
 מסמנים $C(A) = \{\text{המרחב הנפרש על ידי עמודות } A\}$ - נקרא **מרחב העמודות** של A .

דוגמה: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ אז $R(A) = \text{Sp}\{(1,2), (2,3), (5,6)\}$ וגם $R(A) \subseteq \mathbb{R}^2$
 $C(A) = \text{Sp}\{(1,2,5), (2,3,6)\}$ וגם $C(A) \subseteq \mathbb{R}^3$

הערה: אם A מטריצה $k \times n$ אז $R(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ ו- $C(A) \subseteq \mathbb{R}^k$

משפט: אם A מטריצה מסדר $k \times n$ ואם B מטריצה המתקבלת מ- A ע"י פעולות אלמנטריות על שורות A , אז $R(A) = R(B)$

הוכחה: $R(B) = Sp\{ \text{שורות } B \}$, $R(A) = Sp\{ \text{שורות } A \}$

מאחר ששורות B מתקבלות על-ידי פעולות אלמנטריות על שורות A ופעולות אלו לא משנים את התת-מרחב הנפרש נקבל כי $R(A) = R(B)$.

מסקנה: $\dim R(A) =$ מספר השורות השונות מ- 0 במטריצה מדורגת השקולה ל- A .
 במילים אחרות $\dim R(A) =$ מספר המשתנים התלויים במערכת $Ax=0$

הסבר: מספר השורות השונות מ- 0 במטריצה המתקבלת על-ידי דירוג A שווה למספר האיברים הפותחים שאלו למעשה האיברים התלויים. זה שווה לממד מרחב השורות, מפני שמרחב זה נפרש על-ידי השורות השונות מ- 0 במטריצה המדורגת, ואלו הן בלתי תלויות לפי המשפט הקודם.

הגדרה: $\dim R(A)$ נקרא גם **דרגת השורות של A** .
 זה שווה למספר השורות הבלתי-תלויות המקסימלי שיש ב- A .

טענה: אם $v_1 \dots v_n$ הם וקטורים ב- $\mathbb{R}^k$ ואם P מטריצה הפיכה מסדר $k \times k$
 אז לכל $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ $v_n = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{n-1} v_{n-1}$ *
 אם ורק אם $P v_n = \alpha_1 P v_1 + \dots + \alpha_{n-1} P v_{n-1}$ **
 בפרט $\{v_1 \dots v_n\}$ בלתי תלויה אם ורק אם $\{P v_1, \dots, P v_n\}$ בלתי תלויה.

הוכחה: ** מתקבל מ- $*$ על-ידי כפל ב- P .

$*$ מתקבל מ- $**$ על-ידי כפל ב- P^{-1} .

טענה: אם A מטריצה מסדר $k \times n$ ואם PA מטריצה מדורגת (המתקבלת מ- A לאחר כפל משמאל ב- P הפיכה)
 אז מצב התלות בין עמודות A זהה לזה שבין עמודות PA .

הוכחה: אם $v_1, \dots, v_n$ הם עמודות A אז $P v_1, \dots, P v_n$ הן עמודות PA
 לכן הטענה מתקבלת מן הטענה הקודמת.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-1R_1+R_3 \rightarrow R_3]{-2R_1+R_2 \rightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2R_2+R_3 \rightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

דוגמה:

מסקנה I: $R(A) = Sp\{(1, -1, 2, 3), (0, 0, -1, -1)\}$ לכן דרגת השורות היא 2.

$$\xrightarrow{\text{דירוג קנוני}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

מסקנה II: העמודות שבהן יש איבר פותח במטריצה PA הן בלתי-תלויות

כי הן חלק מהבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^k$.

כל העמודות האחרות הן צירופים לינאריים של עמודות אלו.

אם נסמן ב- w_1, w_2, w_3, w_4 את העמודות של המטריצה המדורגת קנונית אז $\{w_1, w_3\}$ בסיס למרחב העמודות, $w_2 = -w_1$, $w_4 = 1 \cdot w_1 + 1 \cdot w_3$,

לכן אם נסמן ב- $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ את העמודות של המטריצה המקורות A אז אותו מצב של תלות קיים גם בין העמודות שלה. כלומר $\{v_1, v_3\}$ בסיס למרחב העמודות, $v_2 = -v_1$, $v_4 = 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_3$,

מסקנה: אם PA המטריצה המתקבלת מדורג קנוני של A

אז קבוצת העמודות של A שבהן יש איברים פותחים הוא בסיס ל- $C(A)$.

כל עמודה אחרת היא צירוף לינארי של עמודות הנ"ל,

עם אותם המקדמים המופיעים באותו עמודה במטריצה המדורגת.

הערה: אם נתון $W = Sp\{v_1, \dots, v_n\}$

ואם רוצים למצוא בסיס של W שמורכב מוקטורים מבין $\{v_1, \dots, v_n\}$

מדרגים את המטריצה שעמודותיה הן $v_1, \dots, v_n$

ואז מקבלים תמונה מלאה של מצב התלות בין $\{v_1, \dots, v_n\}$

כך שמקבלים בסיס מתוך קבוצה פורשת.

מסקנה: $\dim C(A) =$ מספר העמודות במטריצה המדורגת PA שבהן יש איברים פותחים

$=$ מספר האיברים הפותחים

משפט: $\dim C(A) = \dim R(A)$ דרגת השורות = דרגת העמודות

הוכחה: $\dim C(A) =$ מספר האיברים הפותחים ב-PA המדורגת

$=$ מספר השורות הבלתי-תלויות ב-PA $= \dim R(A)$

הגדרה: המספר $\dim R(A) = \dim C(A)$ נקרא **הדרגה של A**.
מסמנים אותו ב-**rank(A)** או $\rho(A)$

הערה: אם A מטריצה מסדר $k \times n$ אז

$$\text{rank}(A) \leq \min(n, k)$$

הסבר: $R(A) \subseteq \mathbb{R}^n$, $C(A) \subseteq \mathbb{R}^k$

לכן $\dim C(A) \leq \dim \mathbb{R}^k = k$

$$\dim R(A) \leq \dim \mathbb{R}^n = n$$

שיעור 11-ב (31.12.09)

(רב תודות לנעה בן-צבי)

תזכורת: הוכחנו שלכל מטריצה A : $\underbrace{\dim R(A)}_{\substack{\text{מימד מרחב} \\ \text{השורות של } A}} = \underbrace{\dim C(A)}_{\substack{\text{מימד מרחב} \\ \text{העמודות של } A}}$

וסימנו את המימד הנ"ל ב- $\text{rank}(A)$ או $\rho(A)$ וזה.

שאלה: מצא בסיס ל- $R(A)$ וגם ל- $C(A)$ כאשר $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

תשובה:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} -R_1 + R_3 \rightarrow R_3 \\ -1R_1 + R_3 \rightarrow R_3 \\ -1R_1 + R_4 \rightarrow R_4 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\begin{matrix} -\frac{1}{2}R_4 \rightarrow R_4^* \\ R_4^* \leftrightarrow R_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_3 + 4R_2 \rightarrow R_3 \\ R_4 + R_2 \rightarrow R_4 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_4 - R_3 \rightarrow R_4 \\ -R_2 + R_1 \rightarrow R_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

לכן מרחב השורות של A :

$$R(A) = \text{Sp}\{ \text{שורות } A \} = \text{Sp}\{ \underbrace{(1,0,0,2), (0,1,0,0), (0,0,1,-3)}_{\substack{\text{זו הקבוצה המתקבלת על-ידי פעולות} \\ \text{אלמנטריות על שורות } A \text{ שפורשת את } P(A)}} \}$$

לכן $\{ (1,0,0,2), (0,1,0,0), (0,0,1,-3) \}$ קבוצה בלתי תלויה (כי היא מדורגת) הפורשת את $R(A)$ ולכן היא בסיס ל- $R(A)$. כלומר $\dim R(A) = 3$.

כעת נמצא בסיס למרחב העמודות של A .

מן המטריצה המדורגת נובע ששלוש העמודות הראשונות של A הן בת"ל.

$$A_4 = 2A_1 - 3A_3 \quad \text{אז} \quad A_1, A_2, A_3, A_4$$

(כל זאת כיוון שאנו יודעים שדירוג מטריצה שומר על יחסי התלות בין וקטורי העמודה)

לכן מרחב עמודות של A :

$$C(A) = \text{Sp}\{ A_1, A_2, A_3 \} = \{ (2,1,1,1), (1,1,-3,-1), (1,0,1,0) \}$$

כאשר $\{ A_1, A_2, A_3 \}$ קבוצה בלתי תלויה ולכן בסיס ל- $C(A)$.

$$\dim C(A) = 3 \quad \text{ולכן} \quad \rho(A) = 3$$

הערה: אם PA היא מטריצה המתקבלת מדירוג המטריצה A
 אז בד"כ $C(A) \neq C(PA)$ אם כי $\dim(C(A)) = \dim(C(PA))$

דוגמה: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ אז $C(A) = Sp\{(1,1)\}$. נדרג את A ונקבל
 $PA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ אז $C(PA) = Sp\{(1,0)\}$.
 לכן המרחבים שונים למרות שמימדיהם שווים.

הערה: אם A מטריצה מסדר $k \times n$
 אז קבוצת הפתרונות המערכת ההומוגנית $A\vec{x} = \vec{0}$ הוא תת מרחב של $\mathbb{R}^n$

הגדרה: לכל מטריצה A מסדר $(k \times n)$ נסמן $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$
 $N(A)$ הוא מרחב הפתרונות $A\vec{x} = 0$ (ניתן לסמן גם ב- $\text{null}(A)$)

משפט: לכל מטריצה A מסדר $(k \times n)$ מתקיים $\dim(N(A)) = n - \rho(A)$
 וזה שווה למספר המשתנים החופשיים במערכת.

הוכחה: נניח ש- A מטריצה מסדר $(k \times n)$ ונדרג אותה דירוג קנוני:

$$PA = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1^{i1} & \square & \dots & \dots & \dots & \square \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1^{i2} & \square & \dots & \dots & \square \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1^{i3} & \square & \square \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

נקבל
 $\left. \begin{matrix} k-m \\ \text{שורות אפסים} \end{matrix} \right\}$

($k \times k$ רגולרית P)

סימנו את מספר האיברים הפותחים ב- i . לכן $\rho(A) = m$
 המשתנים התלויים הם $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{i3}$.
 שאר המשתנים שמספרם $n-m$ הם חופשיים, נסמנם $x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{j(n-m)}$
 פותרים את המערכת ומקבלים שכל פתרון הוא וקטור באורך n
 שבו המשתנים התלויים $x_{i1}, \dots, x_{i3}$
 מופיעים כביטויים של המשתנים החופשיים $x_{j1}, \dots, x_{j(n-m)}$
 כלומר כל פתרון למערכת הוא וקטור מהצורה:

$$* \underbrace{(x_{j1} \dots x_{j2} \dots x_{j(n-m)})}_{n \text{ משתנים}}$$

המשך הדף הבא...

ניתן להוציא את המשתנה החופשי כגורם משותף:

$$= x_{j_1}(\underbrace{\dots, \underset{j_1}{1}, \dots, \underset{j_2}{0}, \dots, \underset{j(n-m)}{0}, \dots}_{v_1}) + x_{j_2}(\underbrace{\dots, \underset{j_1}{0}, \dots, \underset{j_2}{1}, \dots, \underset{j(n-m)}{0}, \dots}_{v_1}) + \dots$$

$$+ x_{j(n-m)}(\underbrace{\dots, \underset{j_1}{0}, \dots, \underset{j_2}{0}, \dots, \underset{j(n-m)}{1}, \dots}_{v_1})$$

הוקטורים $v_1, v_2, \dots, v_{n-m}$ הם קבועים (לא מופיעים בהם משתנים)

וכל פתרון למערכת הוא צירוף לינארי שלהם לכן $N(A) = \text{Sp}\{v_1, v_2, \dots, v_{n-m}\}$

בנוסף, הקבוצה $v_1, v_2, \dots, v_{n-m}$ היא בת"ל

כי אם $x_{j_1}, \dots, x_{j(n-m)}$ סקלרים כלשהם כך ש- $x_{j_1}v_1 + \dots + x_{j(n-m)}v_{n-m} = 0$

נקבל כי הוקטור * שווה ל-0.

בפרט, נקבל מכאן שבמקומות $j_1, \dots, j(n-m)$ בוקטור * מופיעים אפסים.

לכן $x_{j_1} = x_{j_2} = \dots = x_{j(n-m)} = 0$ ולכן $\{v_1, \dots, v_{n-m}\}$ בת"ל, ולכן בסיס ל- $N(A)$.

$$\dim N(A) = n - m = n - \rho(A) = \text{מספר המשתנים החופשיים של המערכת } A\bar{x}$$

מסקנה:

מצאו בסיס ל- $w = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y - 2z = 3y + 2t = z - 2t\}$

שאלה:

יש להוכיח קודם שזהו מרחב לינארי.

מחפשים את קבוצת הפתרונות של מערכת $\begin{cases} y - 2z = 3y + 2t \\ 3y + 2t = z - 2t \end{cases}$

תשובה:

$$\begin{cases} y + z + t = 0 \\ 3y - z + 4t = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{נחלק ב-2}} \begin{cases} 2y + 2z + 2t = 0 \\ 3y - z + 4t = 0 \end{cases} \text{ כלומר}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ נסמן ב-A את המטריצה}$$

$$w = \{(x, y, z, t) \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} \text{ אזי}$$

לכן W הוא תת מרחב של $\mathbb{R}^4$

כי הוא קבוצת הפתרונות של המערכת ההומוגנית $A\bar{x} = \underline{0}$ הנ"ל.

נמצא לו בסיס. לשם כך נדרג את מטריצת המערכת:

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

המשך הדף הבא...

x, t הם משתנים חופשיים (כי אין איברים פותחים בעמודות שלהם)
 לכן $\dim W = 2$ ובסיס עבורו הוא:

$$\left\{ \left(\underset{b}{1}, \overset{a}{0}, \underset{b}{0}, \overset{a}{0} \right), \left(\underset{b}{0}, \overset{a}{-\frac{5}{4}}, \underset{b}{\frac{1}{4}}, \overset{a}{1} \right) \right\}$$

^a בכל וקטור מציבים את הערכים של המשתנים החופשיים לקבלת המשתנים התלויים.

^b את המשתנים החופשיים בוחרים כך שיתקבלו פתרונות בת"ל (1 במקום של המשתנה החופשי בוקטור מסויים וכל שאר המשתנים החופשיים באותו הוקטור הם אפסים)

משפט: מטריצה ריבועית A מסדר $n \times n$ היא הפיכה אם ורק אם $\rho(A) = n$

הוכחה: A הפיכה אם"ם למערכת $A\vec{x} = \vec{0}$ יש פתרון יחיד.

כלומר, אם ורק אם מרחב הפתרונות של המערכת $A\vec{x} = \vec{0}$ הוא מרחב ה- $\{0\}$

A רגולרית אם"ם $N(A) = \{0\}$ כלומר $\dim N(A) = 0$

וזה שקול לעובדה ש- $n - \rho(A) = 0$ ולכן $n = \rho(A)$

שיעור 12-א (05.01.10)

(רב תודות לנעה בן-צבי)

$\text{מספר המשתנים החופשיים} = \underbrace{\dim P(A)}_{\substack{\text{מימד מרחב הפתרונות} \\ \text{של המערכת } Ax=0}} = \underbrace{n}_{\substack{\text{מספר הפעולות} \\ \text{של המערכת } Ax=0}} - \underbrace{\rho(A)}_{\substack{\text{מספר הנעלמים} \\ \text{הקשורים}}}$	משפט: אם A מטריצה $k \times n$ אז
--	--

תרגיל: הוכיח כי אם A מטריצה מסדר $k \times n$ ו- B מטריצה מסדר $(n \times m)$ כך ש- $AB=0$ אז $\rho(A) + \rho(B) \leq n$

פתרון: השוויון $AB=0$ מבטיח שכל עמודות המטריצה AB הן 0. לכן $AB_i = 0$ (עמודה i של AB) לכל עמודה B_i של B , $1 \leq i \leq m$. ולכן $\{B_1, B_2, \dots, B_m\} \subseteq \{x \mid Ax=0\} = \underbrace{P(A)}_{\text{תת-מרחב של } \mathbb{R}^n}$ (עמודות של B). כלומר $C(B) \subseteq P(A) \Leftrightarrow \{\text{מרחב העמודות של } B\} \subseteq \{\text{מרחב הפתרונות של } Ax=0\}$

לכן $\dim C(B) = \rho(B)$ וידוע כי $\dim C(B) \leq \dim P(A)$ ולכן $\rho(B) + \rho(A) \leq n$ (מ.ש.ל. מהמשפט שלעיל נקבל כי $\dim P(A) = n - \rho(A)$).

דוגמה: אם A, B מטריצות (4×4) ואם $P(A)=2$ ו- $P(B)=3$ אז $A \cdot B \neq 0$

הסבר: אם $AB=0$ נקבל מהתרגיל הקודם כי $\rho(A) + \rho(B) \leq 4$. כלומר $2+3 \leq 4$ וזו סתירה ולכן $AB \neq 0$.

הערה: אם A מסדר $(m \times n)$ רגולרית ו- B מסדר $n \times m$ ואם $AB=0$ אז $A^{-1}(AB)=0$ ולכן $B=0$. במקרה זה $\rho(A)=n$ ו- $\rho(B)=0$ וכמובן $\rho(A) + \rho(B) = n$

משפט: נניח A מטריצה מסדר $(k \times n)$ ו- B מטריצה מסדר $(n \times n)$.
אזי $\rho(AB) \leq \rho(A)$ וגם $\rho(AB) \leq \rho(B)$.

הערה:

הוכחה:

מצד שני $AB=(AB_1, AB_2, \dots, AB_m)$ כאשר $B_1, \dots, B_m$ הן עמודות B

$$Sp\{AB_1, \dots, AB_m\} \subseteq C(A) \quad \text{ולכן} \quad \underbrace{\{AB_1, AB_2, \dots, AB_m\}}_{\text{עמודות } A} \subseteq \underbrace{C(A)}_{\text{מרחב עמודות } A} \quad \text{לכן}$$

$$\rho(AB) = \rho((AB)^t) = \rho(B^t \underbrace{A^t}_{\text{לפי *}}) \leq \rho(B^t) = \rho(B) \quad \text{באופן דומה}$$

$$\rho(\underbrace{\begin{pmatrix} A & B \\ \hline \end{pmatrix}}_{(k \times m)}) = m - \dim P(AB) \quad \text{ידוע כי} \quad \underline{\text{הוכחה אחרת:}}$$

$AB\underline{x}=0$ גם תא $x \in \mathbb{R}^m$, $B\underline{x}=0$ גם נשים לב כי אם

משפט:

אם A רגולרית מסדר $(n \times n)$ אז:

לכל מטריצה B מסדר $(n \times m)$ $\rho(AB) = \rho(B)$

ולכל מטריצה C מסדר $(k \times n)$ $\rho(CA) = \rho(A)$

הוכחה:

אם $Bx=0$ כאשר $x \in \mathbb{R}^m$ אז $ABx=0$

מצד שני, אם $ABx=0$ כאשר $x \in \mathbb{R}^m$ אז $A^{-1}(ABx)=0$ ולכן $Bx=0$

מכאן, הראנו כי $Bx=0$ אם"ם $ABx=0$

כלומר $P(AB)=P(B)$ לכן $\dim P(AB)=\dim P(B)$

מכאן $\rho(AB)=\rho(B)$ ולכן $m-\rho(AB)=m-\rho(B)$ *

באופן דומה כיוון ש- $\rho(CA) = \rho((CA)^t) = \rho(\underbrace{A^t}_{\text{רגולרית}} C^t)$

אז לפי * $\rho(A^t C^t) = \rho(C^t) = \rho(C)$ מ.ש.ל.

תרגיל:

נניח כי A מטריצה $(n \times n)$. ידוע כי $\rho(A^2) < \rho(A)$

הוכח כי A סינגולרית וכי קיים $y \in \mathbb{R}^n$ כך ש- $Ay \neq 0$ אבל $A^2y=0$.

פתרון:

לפי המשפט הקודם אז $\rho(A \cdot A) = \rho(A)$ בסתירה לנתון. לכן A סינגולרית.

$x \in P(A^2) \subseteq P(A)$ כי אם $x \in P(A)$ אז $Ax=0$ ואז $A^2x=0$ כלומר $x \in P(A^2)$

לכן $\dim P(A) \leq \dim P(A^2)$ ולכן $n - \rho(A) \leq n - \rho(A^2)$.

מכאן $\rho(A^2) \leq \rho(A)$ אבל מאחר שנתון כי $\rho(A^2) < \rho(A)$

נקבל כי $\dim P(A) < \dim P(A^2)$ ולכן $P(A) \subset P(A^2)$

לכן קיים $y \in P(A^2)$ כך ש- $y \notin P(A)$

כלומר קיים y כך ש- $Ay \neq 0$ אבל $A^2y=0$ מ.ש.ל.

המשך לתרגיל: להוכיח $\{y, Ay\}$ קבוצה בת"ל (y הוא הוקטור שמצאנו קודם).

פתרון:

נניח כי $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ סקלרים כלשהם כך ש- $\alpha y + \beta Ay = 0$.

נרצה להראות כי $\alpha = \beta = 0$

אז $A(\alpha y + \beta Ay) = 0$

נקבל כי $\alpha Ay + \beta A^2y = 0$ כיוון שידוע כי $A^2y=0$.

מכאן נקבל כי $\alpha Ay = 0$ כאשר $Ay \neq 0$

מכאן $\alpha = 0$ ולכן $\beta Ay = 0$ כאשר $Ay \neq 0$

ולכן $\beta = 0$ מ.ש.ל.

שאלה:

$$\begin{aligned} v &= \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = y - t = 0 \} \\ w &= \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2z = 2z - t = 0 \} \end{aligned}$$

נתונים

מצאו את $\dim(v+w)$

פתרון:

נמצא בסיסים ל- v ו- w .

$$\begin{aligned} v &= \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y = t \} & w &= \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 2z = t \} \\ &= \{ (t, t, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R} \} & &= \{ (t, t, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R} \} \\ &= \text{Sp}\{ (1, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0) \} & &= \text{Sp}\{ (2, 0, 1, 2), (0, 1, 0, 0) \} \end{aligned}$$

לפי משפט ישן $\text{Sp}(A) + \text{Sp}(B) = \text{Sp}(A \cup B)$

$$v + w = \text{Sp}\{ (1, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (2, 0, 1, 2), (0, 1, 0, 0) \}$$

לכן

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נדרג:

$$v + w \text{ לבן } \{ (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0) \} \text{ קבוצה בת"ל שפורשת את } v + w$$

לכן הוא בסיס

$$\dim(v+w) = 3 \text{ מכאן}$$

שיעור 12-ב (07.01.10)

(רב תודות לנעה בן-צבי)

משפט המימד לסכום חיתוך של תת-מרחבים

הקדמה: אם V מרחב לינארי נוצר סופית אז כל תת-מרחב שלו נוצר סופית. ידוע כי אם $U, W \subseteq V$ תת-מרחבים של V אז $V+W$ וגם $V \cap W$ תת-מרחבים של V . מתקיים $U \cap W \subseteq U, W \subseteq U+W$

משפט: אם V מרחב לינארי נוצר סופית אז לכל שני תת-מרחבים V, W שלו מתקיים:

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

הוכחה: נבחר בסיס $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ של $U \cap W$ (אם $U \cap W = \{0\}$ אז נניח כי $k=0$)

לכן $U \cap W \subseteq U$ קבוצה בלתי-תלויה ב- U .
ניתן להשלים אותה לבסיס של U : $\{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_m\}$
גם כאן ייתכן כי $m=0$.

מצד שני $U \cap W \subseteq W$ ולכן את הקבוצה הבלתי-תלויה $\{v_1, \dots, v_k\}$
ניתן להשלים לבסיס של W : $\{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_n\}$
ושוב ייתכן כי $n=0$.

נוכיח כי הקבוצה $B = \{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n\}$ בסיס של $U+W$
כלומר, נוכיח כי הקבוצה הנ"ל פורשת את $V+W$ והוא בת"ל.
 $V = \text{Sp}\{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_m\}$ $U = \text{Sp}\{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_m\}$
כי אלו בסיסים של התת-מרחבים הנ"ל.

לפי משפט ישן ידוע כי $\text{Sp}(U) + \text{Sp}(W) = \text{Sp}(U \cup W)$
לכן $U+W = \text{Sp}\{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n\}$
(כי קבוצה זו היא חיתוך בסיסים של U ו- W)
ולכן B פורשת את $U+W$.

נותר להוכיח כי היא בת"ל.

המשך בדף הבא...

נותר להוכיח כי $B = \{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_n\}$ שפורשת את $U+W$ היא בת"ל.

לשם כך נניח ש- $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_m, \gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{R}$

כך ש- $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m + \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_n w_n = 0$

צירוף לינארי שכל הסקלרים שלו אפסים.

$$\underbrace{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m}_{\in U} = \underbrace{-\gamma_1 w_1 - \dots - \gamma_n w_n}_{\in W} \quad \text{לכן}$$

$$-\gamma_1 w_1 - \dots - \gamma_n w_n \in U \cap W \quad \text{לכן}$$

ולכן קיימים סקלרים $\delta_1, \dots, \delta_k$ כך ש- $-\gamma_1 w_1 - \dots - \gamma_n w_n = \delta_1 v_1 + \dots + \delta_k v_k$

(כי כל וקטור ב- $U \cap W$ היא צירוף לינארי של $v_1, \dots, v_k$)

$$\delta_1 v_1 + \dots + \delta_k v_k + \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_n w_n = 0 \quad \text{מכאן נובע כי}$$

מאחר שהקבוצה $\{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_n\}$ היא בת"ל (ובסיס של W)

$$\delta_1 = \dots = \delta_k = \gamma_1 = \dots = \gamma_n = 0 \quad \text{נקבל כי}$$

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m + \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_n w_n = 0 \quad \text{לכן מהביטוי}$$

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m = 0 \quad \text{נשאר}$$

אבל $\{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_m\}$ בת"ל (כבסיס של U)

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_k = \beta_1 = \dots = \beta_m = 0 \quad \text{לכן}$$

מסקנה: B בת"ל ולכן בסיס של $V+W$.

אי תלות הקבוצה מבטיחה שכל שני וקטורים ב-B שונים זה מזה

ולכן מספר הוקטורים ב-B הוא $k+m+n$

לסיכום:

$$\begin{aligned} & \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) \\ &= (k+m) + (k+n) - k \\ &= k+m+n \\ &= \dim(V+W) \end{aligned}$$

{וזה נראה לי ההוכחה הכי ארוכה שעשינו כל הקורס! - גדי}

תרגיל: בניח כי U, W תת-מרחבים של $\mathbb{R}^5$

1. הוכח כי אם $\dim(U \cap W) = \dim W$ אז $W \subseteq U$

2. הוכח כי אם $\dim(U+W) = \dim U$ אז $W \subseteq U$

3. בניח כי U, W תת-מרחבים שונים ממימד 3

ואם $(1,0,0,0,0), (0,0,0,0,1) \in U \cap W$. מצא את $\dim(U+W)$

פתרון: U, W תת-מרחבים של $\mathbb{R}^5$

1. הוכח כי אם $W \subseteq U$ אז $\dim(U \cap W) = \dim W$

$U \cap W \subseteq W$ ולכן תת-מרחב של W .

מאחר ש- $\dim(U \cap W) = \dim W$ אז לפי משפט קודם $U \cap W = W$.

מכאן, $W = W \cap U \subseteq U$, כלומר $W \subseteq U$.

2. הוכח כי אם $\dim(U + W) = \dim U$ אז $W \subseteq U$

$U \subseteq U + W$ ולפי הנתון המימדים שלהם שווים ולכן התת-מרחבים עצמם שווים.

לכן $U = U + W$ ומכאן $W \subseteq U + W = U$ ולכן $W \subseteq U$.

3. נניח כי U, W תת-מרחבים שונים ממימד 3

ואם $(1,0,0,0,0), (0,0,0,0,1) \in U \cap W$. מצא את $\dim(U + W)$

לפי הנתון יש שני וקטורים בת"ל ב- $U \cap W$ ולכן $\dim(U \cap W) \geq 2$ *

מצד שני $V + W \subseteq \mathbb{R}^5$ ולכן $\dim(U + W) \leq 5$.

לפי משפט הקודם:

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \underbrace{\dim(U \cap W)}_{\text{לפי *}} = 6 - \dim(U \cap W) \leq 4$$

מאחר ש- $U \subseteq U + W$ ו- $\dim(U) = 3$ נתקבל כי $3 \leq \dim(U + W)$

לכן $3 \leq \dim(U + W) \leq 4$

נניח בדרך השלילה ש- $\dim(U + W) = 3$

אז $\dim(U + W) = \dim W$ ואז לפי (2) נקבל $U \subseteq W$

אבל אז $U = W$, בסתירה לנתון.

לכן בהכרח $\dim(U + W) = 4$

שאלה: נתונים התת-מרחבים ב- $\mathbb{R}^4$:

$$W = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0, z = 2t \} \quad U = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y - z + t = 0 \}$$

מצאו בסיסים ל- $U, W, U \cap W, U + W$.

תשובה: U, W הם אכן תת-מרחבים של $\mathbb{R}^4$ כי הם קבוצת פתרונות של מערכת הומוגנית.

$$\begin{aligned} U &= \{ (x, z - t, z, t) \mid x, z, t \in \mathbb{R} \} = \text{Sp} \{ (1, 0, 0, 0), \overbrace{(0, 1, 1, 0), (0, -1, 0, 1)}^{\text{חיבור}} \} \\ &= \text{Sp} \{ (1, 0, 0, 0), \underbrace{(0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 0)}_{\text{קבוצת בת"ל (מדורגת הפורשת את W)}} \} \end{aligned}$$

המשך בדף הבא...

לכן $\dim U = 3$

דרך נוספת למציאת $\dim U$:

$$\underset{(1 \times 4)}{A} = (0, 1, -1, 1) \quad \text{כאשר} \quad U = P(A)$$

$$U = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid (0, 1, -1, 1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \} \quad \text{כי}$$

$$\rho(A) = 1 \quad \text{לכן}$$

$$\dim U = \dim(P(A)) = 4 - \rho(A) = 4 - 1 = 3 \quad \text{מכאן}$$

כעת נמצא את $\dim W$.

$$\begin{aligned} W &= \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0, z = 2t \} \\ &= \{ (y, y, 2t, t) \mid y, t \in \mathbb{R} \} = \text{Sp}\{ \underbrace{(1, 1, 0, 0)}, \underbrace{(0, 0, 2, 1)} \} \end{aligned}$$

קבוצת בתל (מדורגת) שפורשת את U

$$\dim W = 2 \quad \text{לכן}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{כאשר} \quad W = P(A) \quad \text{גם כאן}$$

$$\rho(A) = 2 \quad \text{ו-} \quad \dim W = \dim(P(A)) = 4 - 2 = 2$$

כעת למציאת בסיס ל- $U+W$.

נשים לב כי $\{ (1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1) \}$ פורשת את U

פורשת את W $\{ (1, 1, 0, 0), (0, 0, 2, 1) \}$

מכאן נובע כי האיחוד של שתי הקבוצות פורש את $U+W$.

לכן למציאת בסיס ל- $U+W$ נדרג את הקבוצה הפורשת:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 - R_1 \rightarrow R_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{דירוג}]{\text{עוד פעולות}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U+W = \text{Sp}\{ (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \} = \mathbb{R}^4 \quad \text{לכן}$$

$$\dim(U+W) = 4 \quad \text{לכן}$$

$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U+W) = 3 + 2 - 4 = 1 \quad \text{לפי משפט הקודם}$$

למציאת בסיס לחיתוך $U \cap W$ יש לפתור את המערכת:

$$x(1, 0, 0, 0) + y(0, 1, 1, 0) + z(0, 0, 1, 1) = s(1, 1, 0, 0) + t(0, 0, 2, 1)$$

לאחר פתרון המערכת ההומוגנית

נקבל תיאור לקבוצת כל הוקטורים של $U \cap W$

$$U \cap W = \{ \alpha(1, 1, 2, 1) \mid \alpha \in \mathbb{R} \} = \text{Sp}\{ (1, 1, 2, 1) \} \quad \text{מקבלים בסוף:}$$

הערה:

שיעור 13-א (12.01.09)

הצגת וקטור בבסיס מסוים - וקטור קואורדינטות

נניח ש- V מרחב לינארי מממד n ו- $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ בסיס סדור.
 אז לכל וקטור $v \in V$ יש הצגה יחידה מהצורה $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ כאשר $\alpha_1, \alpha_n \in \mathbb{R}$.
 (קיום ההצגה מובטח מפני ש- B קבוצה פורשת. יחידות ההצגה מובטחת כי B קבוצה בת"ל.)
 לכן v נקבע לחלוטין על ידי הסקרים $\alpha_1 \dots \alpha_n$ שבהצגה הנ"ל.

הגדרה: נניח ש- V מרחב לינארי ו- B בסיס סדור שלו. לכל $v \in V$ נסמן ב- $[v]_B$ את וקטור הקואורדינטות של v לפי בסיס B שמוגדר כך:

$$[v]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R} \quad \text{כאשר} \quad v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

(לשים לב כי שינוי הסדר באברי B יגרום לשינוי סדר הקואורדינטות של $[v]_B$)

דוגמאות:

1. ידוע כי $B = \{1x, x^2, \dots, x^n\}$ בסיס ל- $\mathbb{R}_n[x]$.
 כל פולינום $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ הוא מהצורה $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$
 לכן $[p(x)]_B = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$

2. ידוע ש- $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ בסיס של $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \quad \text{ולכן מטריצה} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{מקיים}$$

3. אם $E = \{(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)\}$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^n$ אז לכל $v \in \mathbb{R}^n$

$$[v]_E = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad v = (a_1 \dots a_n) \text{ נקבל}$$

(כלומר וקטור הקואורדינטות של $v \in \mathbb{R}^n$ לפי הבסיס הסטנדרטי זה הוא עצמו)

משפט: נניח ש- V מרחב לינארי ו- $B = \{v_1 \dots v_n\}$ בסיס שלו.

אז לכל $v, w \in V$ ולכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$[\alpha v + \beta w]_B = \alpha [v]_B + \beta [w]_B$$

הוכחה:

$$\alpha [v]_B + \beta [w]_B = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n + \beta y_n \end{bmatrix} \quad \text{אז} \quad [w]_B = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad [v]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{נניח ש-}$$

למציאת $[\alpha v + \beta w]_B$ צריך לרשום את $\alpha v + \beta w$ כצירוף לינארי של איברי B .

$$[v]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{מצב שני} \quad v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \quad \text{שקול ל-}$$

$$[w]_B = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{ו-} \quad w = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n \quad \text{שקול ל-}$$

$$\alpha v + \beta w = (\alpha x_1 + \beta y_1) v_1 + \dots + (\alpha x_n + \beta y_n) v_n \quad \text{לכן}$$

$$[\alpha v + \beta w]_B = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n + \beta y_n \end{bmatrix} \quad \text{ולכן} \quad [\alpha v + \beta w]_B = \alpha [v]_B + \beta [w]_B$$

משפט: נניח ש- V מרחב לינארי ו- B בסיס שלו, אז:

$$1. \quad v = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_k w_k \quad \text{אם} \quad [v]_B = \lambda_1 [w_1]_B + \dots + \lambda_k [w_k]_B$$

$$2. \quad \{w_1 \dots w_k\} \subseteq V \quad \text{ב"ת אם} \quad \{[w_1]_B, \dots, [w_k]_B\} \quad \text{ב"ת.}$$

$$3. \quad \{w_1 \dots w_k\} \subseteq V \quad \text{פורשת את } V \quad \text{אם} \quad \{[w_1]_B, \dots, [w_k]_B\} \quad \text{פורשת את } \mathbb{R}^n$$

הוכחות:

1. שימוש חוזר במשפט הקודם.

2. נניח ש- $\{w_1 \dots w_n\}$ ב"ת. צ"ל ש- $[w_1]_B \dots [w_k]_B$ ב"ת.

נניח ש- $\alpha_1[w_1]_B + \alpha_2[w_2]_B + \dots + \alpha_k[w_k]_B = 0 \in \mathbb{R}^n$

$$[\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_k w_k]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n = [0]_B \quad \text{לפי 1:}$$

זוה $0 \in V$ (וזוה הוקטור של V שבצגה שלו כצירוף לינארי של איברי B , כל הסקלרים אפסאים) $0v = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_n$

לכן מתוך $[\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_k w_k]_B = [0]_B$ מקבלים (לפי 1) ש- $\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_k w_k = 0$

ומתוך הקבוצה $\{w_1 \dots w_k\}$ נובע ש- $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$

ולכן $[w_1]_B \dots [w_k]_B$ בלתי תלויה.

כוייון ההפוך דומה.

3. לעשות לבד. נניח שזה פורשת ו....

תרגיל: הוכיח שהקבוצה $\{(1,1), (1,-1)\}$ בסיס של $\mathbb{R}^2$

ולמצוא את הקאורדינטות של $(3,2)$ לפי E ולפי B .

תשובה: הקבוצה B היא ב"ת ויש בה שני וקטורים (כאשר $\dim \mathbb{R}^2 = 2$) ולכן היא בסיס.

$$[(3,2)]_E = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

כדי למצוא את $[(3,2)]_B$ נרשום: $(3,2) = x(1,1) + y(1,-1)$

$$(3,2)_B = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad x = \frac{5}{2}, \quad y = \frac{1}{2} \quad \begin{cases} x+y=3 \\ x-y=2 \end{cases}$$

באופן כללי אם $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ונחפש את $[(a, b)]_B$ עלינו לרשום:

$$(a, b) = x(1, 1) + y(1, -1)$$

$$y = \frac{a-b}{2} \quad x = \frac{a+b}{2} \quad \begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \end{cases}$$

$$[(a, b)]_E = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad [(a, b)]_B = \begin{bmatrix} \frac{a+b}{2} \\ \frac{a-b}{2} \end{bmatrix} \quad \text{לכן}$$

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} \\ \frac{a-b}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} [v]_E$$

$$\left(\frac{1}{2}(1, 1) + \frac{1}{2}(1, -1) = (1, 0) \text{ כי } \right) \quad [(1, 0)]_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{נשים לב ש-}$$

$$\left(\frac{1}{2}(1, 1) - \frac{1}{2}(1, -1) = (0, 1) \text{ כי } \right) \quad [(0, 1)]_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

לכן אם נסמן $P = [[(1, 0)]_B, [(0, 1)]_B]$

אז לכל $v \in \mathbb{R}^2$: $[v]_B = P[v]_E$

הערה: מסתבר ש- $P = M^{-1}$ כאשר $M = [(1, 1)_E, (1, 0)_E]$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = P \quad \text{אכן}$$

הגדרה: נניח ש- $B = \{v_1 \dots v_n\}$ ו- $C = \{w_1 \dots w_n\}$ בסיסים סדורים של מרחב לינארי V .

אז מטריצת המעבר מ- B ל- C מוגדרת כך:

$$M = [[w_1]_B, \dots, [w_n]_B] \quad \text{ייצור הבסיס החדש לפי הישן}$$

משפט: אם B ו- C בסיסים של V ואם M מטריצת המעבר מ- B ל- C אז:

$$1. \quad M^{-1} \text{ היא המטריצת המעבר מ-} C \text{ ל-} B. \text{ כלומר } ([v_1]_C, \dots, [v_k]_C) = M^{-1}$$

$$2. \quad [v]_C = M^{-1}[v]_B \text{ לכל } v \in V \text{ כאשר } M \text{ מטריצת המעבר מ-} B \text{ ל-} C.$$

מעבר מבסיס לבסיס

משפט:

נניח ש-V מרחב לינארי ו- $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ו- $C = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ בסיסים.
 אז כפי שהגדרנו: מטריצת המעבר מ-B ל-C היא $M = [[w_1]_B, \dots, [w_n]_B]$
 מטריצת המעבר מ-C ל-B היא $P = [[v_1]_C, \dots, [v_n]_C]$

$$P = M^{-1}$$

הוכחה:

ידוע שלכל וקטור בבסיס C יש הצגה יחידה כצירוף לינארי של איברי הבסיס B.

$$\text{לכן נוכל לרשום: (1) } w_i = \sum_{j=1}^n m_{ji} v_j \quad \text{לכל } 1 \leq i \leq n$$

(הסקלרים בצירוף הזה הם איברי העמודה i של M)

$$\text{אז } M = \begin{bmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

מצד שני, לפי ההגדרה (P מטריצת המעבר מ-C ל-B) לכן $P = [[v_1]_C, \dots, [v_n]_C]$

$$\text{כלומר } v_j = \sum_{k=1}^n \underbrace{p_{kj}}_{\text{איברי עמודה } j \text{ של } P} w_k \quad (2) \quad P = \begin{bmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

נציב את (2) ב-(1) ונקבל:

$$v_i = \sum_{j=1}^n m_{ji} v_j = \sum_{j=1}^n m_{ji} \sum_{k=1}^n p_{kj} w_k = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n m_{ji} p_{kj} w_k = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ji} p_{kj} w_k$$

$$\text{לכן } w_i = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n m_{ji} p_{kj} \right) w_k$$

מאחר ש- $\{w_1, \dots, w_n\}$ בסיס של V הייצוג היחיד של w_i כצירוף לינארי

של איברי הבסיס הוא $w_i = 0 \cdot w_1 + \dots + 1 \cdot w_i + \dots + 0 \cdot w_n$.

$$\sum_{j=1}^n m_{ji} p_{kj} = \begin{cases} 1 & k=i \\ 0 & k \neq i \end{cases} \quad \text{לכן}$$

ביטוי זה שווה $\sum_{j=1}^n p_{kj} \cdot m_{ji}$ שזה $\times \begin{pmatrix} i \\ n \end{pmatrix}$ (שורה k של P) של $P \cdot M = I$ לכן $P \cdot M = I$ מ.ש.ל.

ייצוג אותו וקטור לפי שני בסיסים שונים (והקשר בין ההצגות)

בניח ש-B ו-C בסיסים של V כמו קודם ונניח $v \in V$.

$$\text{הגדרנו } [v]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \text{ כאשר } v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n, \quad [v]_C = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \text{ כאשר } v = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_n w_n$$

משפט: בתאנים הנ"ל לכל $v \in V$ מתקיים $[v]_C = M^{-1}[v]_B$ כאשר M היא מטריצת המעבר מ-B ל-C.

הוכחה: כיוודע אם M מטריצת המעבר מ-B ל-C

$$\text{אז } M = [[w_1]_B, \dots, [w_n]_B] \text{ כאשר } w_i = \sum_{j=1}^n m_{ji} v_j$$

אם $v \in V$ אז (1) $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ ו-(2) $v = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_n w_n$ מחפשים את הקשר בין α_i ו- β_i .

$$\text{מ-(2) נקבל: } v = \sum_{i=1}^n \beta_i w_i \underset{*}{=} \sum_{i=1}^n \beta_i \left(\sum_{j=1}^n m_{ji} v_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_i m_{ji} v_j$$

$$\text{לכן } v = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \beta_i m_{ji} \right) v_j \quad \text{אבל (לפי 1)} \quad v = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$$

מאחר של-V יש הצגה יחידה כצירוף לינארי של איברי $B = \{v_1 \dots v_n\}$

$$\text{לכל } i \leq j \leq n \text{ מתקיים } \sum_{i=1}^n \beta_i m_{ji} = \alpha_j$$

$$\text{לכן עבור } j=1 \text{ נקבל } \beta_1 m_{11} + \dots + \beta_n m_{n1} = \alpha_1$$

$$\text{עבור } j=2 \text{ נקבל } \beta_1 m_{12} + \dots + \beta_n m_{n2} = \alpha_2 \text{ וכו'}$$

$$\text{לכן } \begin{bmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

$$\text{ולכן } M \cdot [v]_C = [v]_B \text{ ולכן } [v]_C = M^{-1}[v]_B \text{ מ.ש.ל.}$$

תרגיל: להוכיח שהקבוצות $B = \{1, 1+x, (1+x)^2\}$ ו- $C = \{1, 1-x, (1-x)^2\}$ בסיס של $\mathbb{R}_2[x]$.

למצוא את מטריצת המעבר מ-B ל-C.

עבור $f = 1+x+x^2$ להוכיח באופן ישיר ש- $[f]_B = M[f]_C$

B ו-C הם בסיסים לפי תרגיל כללי יותר שפרתנו.

תשובה: נרשום את וקטורי הבסיס C כצירוף לינארי של איברי הבסיס B:

נחשב כל מקדם מימין לשמאל (ונשלים בכל צעד)

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot (1+x) + 0 \cdot (1+x)^2 \\ 1-x &= 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (1+x) + 0 \cdot (1+x)^2 \\ (1-x)^2 &= 4 \cdot 1 + (-4) \cdot (1+x) + 1 \cdot (1+x)^2 \end{aligned}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{לכן}$$

שוב מימין לשמאל:

$$\underbrace{1+x+x^2}_v = \underbrace{1 \cdot 1}_{v_1} - \underbrace{(1+x)}_{v_2} + \underbrace{1 \cdot (1+x)^2}_{v_3} \Rightarrow [1+x+x^2]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{נמצא את}$$

$$\underbrace{1+x+x^2}_v = \underbrace{1 \cdot 3}_{w_1} + \underbrace{(-3) \cdot (1+x)}_{w_2} + \underbrace{1 \cdot (1+x)^2}_{w_3} \Rightarrow [1+x+x^2]_C = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{נמצא את}$$

$$M[1+x+x^2]_C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{בדיקה:}$$

שאלה: נניח ש- $a_1, a_2, \dots, a_n$ הם n מספרים שונים (זה מזה).

לכל $1 \leq i \leq n$ נסמן $P_i(x) = (x-a_1) \dots (x-a_{i-1})(x-a_{i+1}) \dots (x-a_n)$

$$P_i(x) = \frac{(x-a_1) \dots (x-a_n)}{(x-a_i)} \quad \text{במילים אחרות}$$

להוכיח שקבוצת הפולינומים $\{P_1(x), \dots, P_n(x)\}$ היא בתלי תלויה ב- $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.

שאלה קשה! (לא נפתור בינתיים)

טענה:

אם $Q(x)$ ו- $P(x)$ פולינומים ממעלה $n-1$
ואם קיימים $a_1 \dots a_n$ מספרים שונים כך ש- $P(a_i) = Q(a_i)$ לכל $1 \leq i \leq n$
אז $P(x) = Q(x)$

הוכחה:

$P(x) - Q(x)$ הוא פולינום ממעלה $n-1$ לכל היותר שמתאפס ב- n נקודות.
אבל לפולינום ממעלה $n-1$ יש לכל היותר $n-1$ שורשים.
לכן $P - Q$ לא יכול להיות פולינום ממעלה חיובית.
לכן $P - Q$ פולינום קבוע.
אבל לפני שהוא מתאפס אז $P - Q = 0$ ולכן $P = Q$

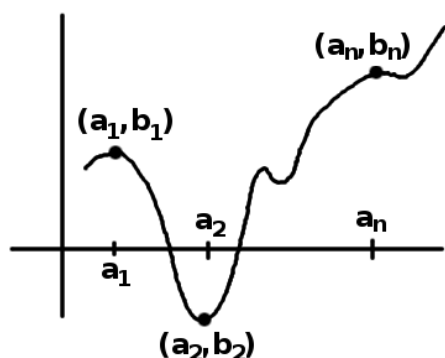
שאלה:

לגרנג'

בניח ש- $\{a_1, \dots, a_n\}$ הם n מספרים שונים
ונניח ש- $b_1 \dots b_n$ מספרים כלשהם.

להוכיח שקיים פולינום $P(x)$ ממעלה $n-1$ כך ש- $P(a_i) = b_i$ $1 \leq i \leq n$
(הערה: לפי השאלה הקודמת, נובע שיש רק פולינום אחד כזה).

פתרון:



נסמן:
$$P_1(x) = \frac{(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_n)}$$

אז $P_1(a_1) = 1$ ו- $P_1(a_i) = 0$ לכל $i \neq 1$.

$$P_2(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_3)\dots(x-a_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\dots(a_2-a_n)}$$

אז $P_2(a_2) = 1$ ו- $P_2(a_i) = 0$ לכל $i \neq 2$.

באופן דומה מגדירים $P_3(x)$, $P_n(x)$

$$P_n(x) = \frac{(x-a_1)\dots(x-a_{n-1})}{(a_n-a_1)\dots(a_n-a_{n-1})}$$

נגדיר כאת: $P(x) = b_1 P_1(x) + \dots + b_n P_n(x)$

אז לכל $1 \leq i \leq n$ נקבל ש- $P(a_i) = b_i$ מ.ש.ל.

$P(x)$ נקרא פולינום האינטרפולציה של לגרנג'.

הערה: לכל פולינום $Q(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ ניתן להסתכל על הערכים $b_i = Q(a_i)$ (אותם a_i מקודם)

לפי השאלה הקודמת ניתן למצוא פולינום מהצורה $b_1 P_1(x) + \dots + b_n P_n(x)$ השווה ל- $Q(x)$ ב- n נקודות שונות ולכן שווה ל- $Q(x)$.

לכן הקבוצה $\{P_1(x), \dots, P_n(x)\}$ פורשת את $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ מאחר ש- $\dim \mathbb{R}_{n-1}[x] = n$ נקבל שקבוצה זו היא בסיס ולכן היא בלתי תלויה. (וזו חשובה גם ל"שאלה קשה" מקודם).

שיעור 13-ב (14.01.09)

מספרים מרוכבים

"מספרים" מהצורה $a+bi$ כאשר $a, b \in \mathbb{R}$ ו- i "מספר" לא ממשי עם התכונה $i^2 = -1$ ונקראים מספרים מרוכבים. מסתבר שאם דורשים ש- $a+bi=0$ אם $a=b=0$ ואם מגדירים על קבוצת המספרים המרוכבים פעולות חיבור וכפל רגילות (כפי שמכירים על בטויים אלגבריים) (כאשר $i^2 = -1$) מקבלים שפעולות אלה מקיימות את כל הפעולות של והחיבור המוכרות ב- $\mathbb{R}$.

הגדרה: מושג השדה

נאמר שקבוצה F שעליה מוגדרות שתי פעולות "+" ו-"-" נקראת שדה אם:

1. סגירות: לכל $a, b \in F$, $a+b \in F$
2. קיבוציות: לכל $a, b, c \in F$, $(a+b)+c = a+(b+c)$
3. קיום נטרלי: קיים איבר $0 \in F$ כך ש- $a+0=0+a=a$ לכל $a \in F$
4. קיום נגדי: לכל $a \in F$ קיים איבר $-a \in F$ כך ש- $a+(-a)=0$
5. סגירות: לכל $a, b \in F$, $a \cdot b \in F$
6. קיבוציות: לכל $a, b, c \in F$, $a(bc) = (ab)c$
7. קיום איבר יחידה: קיים איבר $1 \in F$ כך ש- $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ לכל $a \in F$
8. קיום הפכי: לכל $a \in F$, $a \neq 0$ קיים איבר $a^{-1} \in F$ כך ש- $a \cdot a^{-1} = 1$
9. $1 \neq 0$
10. פילוג: לכל $a, b, c \in F$, $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
11. חילופיות: לכל $a, b \in F$, $a+b = b+a$ ו- $ab = ba$

דוגמאות:

1. $\mathbb{R}$ יחד עם הפעולות $+$, $-$, הרגילות הוא שדה.
2. $\mathbb{Z}$ יחד עם הפעולות $+$, $-$, הרגילות הוא **לא שדה** (לא קיים הפכי לכל מספר)
3. $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ יחד עם פעולות החיבור והכפל מודולו 2 הוא שדה.
4. $\mathbb{Q}$ קבוצת המספרים הרציונאליים היא שדה יחס לפעולות הרגילות.

טענה:

$$\mathbb{C} = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

גם הקבוצה $\mathbb{C}$ עם הפעולות הרגילות של חיבור וכפל של בטויים אלבריים **הוא שדה** שבו

$$0 = 0 + 0 \cdot i \text{ נטרלי לגבי חיבור}$$

$$1 = 1 + 0 \cdot i \text{ נטרלי לגבי הפל}$$

הגדרה פורמלית של שדה המספרים המרוכבים $\mathbb{C}$

הגדרה: נסמן $\mathbb{C} = \{ (a, b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \}$ ($\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$)
קבוצה שעליה מוגדרות פעולות החיבור והכפל הבאות:

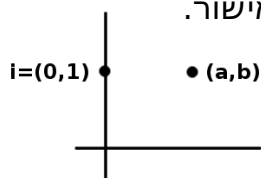
$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

משפט: הקבוצה $\mathbb{C}$ יחד עם שתי הפעולות הנ"ל היא שדה כאשר:
(0,0) נטרלי לגבי חיבור.
(1,0) נטרלי לגבי כפל.

הנגדי לבי חיבור של (a, b) הוא $(-a, -b)$
וההפכי לגבי כפל של $(a, b) \neq (0, 0)$ הוא $\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$

הייצוג הגיאומטרי של $\mathbb{C}$ הוא כמו זה של $\mathbb{R}^2$, כלומר: המישור.
כל איבר של $\mathbb{C}$ מייצג נקודה במישור ולהפך.

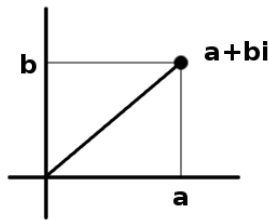


טענה: הקבוצה $\mathbb{C} = \{ (a, 0) \mid a \in \mathbb{R} \}$ "דומה" לחלוטין לקבוצה $\mathbb{R}$
אם נזהה כך: $\mathbb{R} \ni a \sim (a, 0) \in \mathbb{C}$
כי $(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$ ו- $(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0)$
הנטרלי בכפל הוא (1,0) ולכל $a \neq 0$ $(a, 0) \cdot \left(\frac{1}{a}, 0 \right) = (1, 0)$ (הפכית)
לכן הקבוצה $\{ (a, 0) \mid a \in \mathbb{R} \}$ היא תת-שדה של $\mathbb{C}$ והיא זהה ל- $\mathbb{R}$.

טענה: בשדה $\mathbb{C}$ קיים פתרון למשוואה $x^2 = -1$
כלומר, קיים זוג סדור $i = (-1, 0)$ כך ש- $i^2 = (-1, 0)$.

הוכחה: $(0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$

הערה: נשים לב $\mathbb{C} \ni (a, b) = \underbrace{a(1, 0)}_{\sim i} + \underbrace{b(0, 1)}_{\sim i}$
לכן נוהג לסמן $(a, b) = a + bi$ (הצגה יחידה)



הערה: אם נרשום $\mathbb{C} = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
 אם לכל מספר מרוכב $z = a+bi$
 מתאימה נקודה במישור (הנקרא גם מישור המרוכב)

הגדרות: לכל מספר מרוכב $z = a+bi$ (כאשר $a, b \in \mathbb{R}$) מגדירים:

1. $Re\ z = a$ החלק הממשי של z
 $Im\ z = b$ החלק המדומה של z
2. $\bar{z} = a - bi$ (המספר הצמוד ל- z)
3. $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (הערך המוחלט של z) (המרחק מהראשית)
 נשים לב ש- $|(a+0 \cdot i)| = \sqrt{a^2 + 0^2} = |a|$

משפט: לכל שני מספרים $z, w \in \mathbb{C}$ מתקיים:

1. $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$
 $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
 $(w \neq 0) \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$
 $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$
2. $|Im\ z|, |Re\ z| \leq |z|$
3. $z \in \mathbb{R}$ אם ורק אם $z = |z|$
4. $Im\ z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$, $Re\ z = \frac{z + \bar{z}}{2}$
5. $|z \cdot w| = |z| |w|$
 $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$
 $|z^n| = |z|^n$
6. $|z+w| \leq |z| + |w|$
7. $|z|^z = z \cdot \bar{z}$ כי $(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$

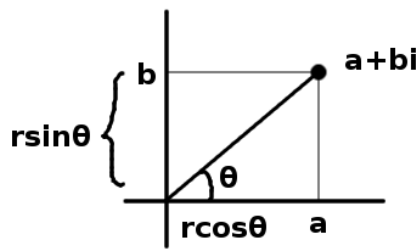
$$z=a+bi \quad \text{דוגמה:}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{z^2} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \underbrace{\frac{a}{a^2+b^2}}_{\in \mathbb{R}} - \underbrace{\frac{b}{a^2+b^2}}_{\in \mathbb{R}} \cdot i \quad \text{בניח ש- } z \neq 0 \text{ אז}$$

$$\frac{1}{2+3i} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13} \cdot i \quad \text{למשל}$$

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

הייצוג הטריגונומטרי (הקוטבים) של מספר מרוכב



$a+bi=z$ נקבע לחלוטין ע"י כמרחק שלה מן הראשית (שהוא $\theta=|z|$) והזווית שהוקטור יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- x (θ). $\boxed{b=r \sin \theta}$ $\boxed{a=r \cos \theta}$

אם $z=0$ לא מוגדרת זווית θ אבל הנקודה נקבעת לחלוטין ע"י $r=0$.

מסקנה: לכל מספר מרוכב $z=a+bi$ יש הצגה יחידה מהצורה

$$z=a+bi=r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

כאשר $r \geq 0$ ממשי ו- $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$z \cdot w = r_1 \cdot r_2 (\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)) \quad \text{אם} \quad \begin{matrix} z = r_1 (\cos \alpha + i \sin \alpha) \\ w = r_2 (\cos \beta + i \sin \beta) \end{matrix} \quad \text{טענה:}$$

$$|z \cdot w| = |z| |w| \quad \text{מסקנה:}$$

$$\arg(z \cdot w) = \arg z + \arg w \pmod{2\pi}$$

משפט דה מואבר (De Moivre)

http://he.wikipedia.org/wiki/משפט_דה-מואבר

http://en.wikipedia.org/wiki/De_Moivre's_formula

$$\left[r(\cos \theta + i \sin \theta) \right]^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) \quad \text{בוסחה:}$$

$$e^{i\pi} = -1 \quad \Leftarrow \quad e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \text{וסתם למתעניינים:}$$

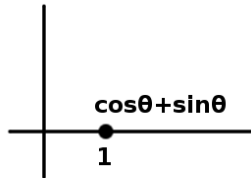
הוצאת שורשים ב-C

הסבר: נביח ש- $w = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

אז למשוואה $z^n = w$ יש n פתרונות שונים והם:

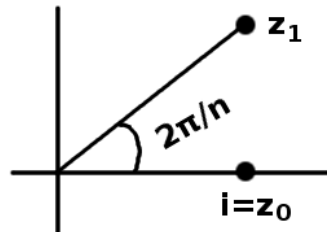
$$z_k = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \quad \text{כאשר } k = 0, 1, \dots, n-1$$

אלה הם כל השורשים מסדר n של w .



בפרט, כל השורשים מסדר n של 1 הם: $(r=1, \theta=0)$

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad \text{כאשר } k = 0, 1, \dots, n-1$$



קבוצת השורשים מסדר n של 1 (גם של כל $w \neq 0$) היא קבוצת הנקודות של מצולע משוכלל עם n צעלות.

Quick Reference

הסבר: המספרים בכתב עילי ליד רוב המשפטים הם מספר הדף שממנו המשפט הועבר (ולכן יש שם את ההוכחה, הערות, ודוגמאות). T7/7 זו מתרגול 7, (ודף 7 מהסוכמים שלי, סורי: ((. T7/sol מהפתרונות של מתרגול 7. WP = wikipedia. **זה לא כולל את הכל.**

מטריצה $n \times k$: n שורות, k עמודות

משולשיות, אלכסוניות:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & \square & \square & \square \\ 0 & \square & \square & \square \\ 0 & \square & \square & \square \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \square & \square \\ 0 & \square & \square & \square \\ 0 & \square & \square & \square \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad N^n = 0$$

אם כל איברי האלכסון שונים מ-0, אז U (או D) הפיכה ו- U^{-1} מאותה הצורה.

משולשית עליונה מתוקנת הפיכה,

והופכית שלה משולשית עליונה ומתוקנת.

$$A(I + N + \dots + N^{n-1}) = (I - N)(I + N + \dots + N^{n-1}) = I - N^n = I$$

$\det$, $|U|$ או $|L|$ = מכפלת איברי האלכסון

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \square & \square & \square \\ 0 & \alpha_2 & \square & \square \\ 0 & 0 & \ddots & \square \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ \square & \alpha_2 & 0 & 0 \\ \square & \square & \ddots & 0 \\ \square & \square & \square & \alpha_n \end{vmatrix} = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n$$
 כלומר

משולשית - A^T - Transpose

$$(A+C)^t = A^t + C^t \quad (A^t)^t = A$$

$$(AB)^t = B^t A^t \quad (\lambda A)^t = \lambda A^t$$

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t \text{ הפיכה ו-}$$

סימטרית אם $A = A^t$

אנטי סימטרית אם $A = -A^t$ ועבורם:

$$\det(A) = \det(A^t) = \det(-A) = (-1)^n \det(A).$$

WP, HW7. Hence $\det(A) = 0$ when n is odd

הפיכה - Invertible - רגולרית

אם A, B הפיכות אז:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \text{ הפיכה ו-}$$

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t \text{ הפיכה ו-}$$

אם A הפיכה:

$$1. \text{ אם } AB=0 \text{ אז } B=0$$

$$2. B \text{ לא הפיכה} \Leftrightarrow AB \text{ לא הפיכה}$$

$$AB \text{ הפיכה} \Leftrightarrow B \text{ הפיכה}$$

$$\text{עבור } 2 \times 2: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$A \text{ ריבועית הפיכה} \Leftrightarrow \det A \neq 0$$

סכום של הפיכות לאו דווקא הפיך

איך למצוא:

$$(1) \text{ מדרגים } [A|I] \text{ ומקבלים } [I|A^{-1}]$$

$$(2) A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

העקבה - $\text{tr}(A)$ - Trace

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) \quad \text{tr}(\alpha A) = \alpha \text{tr}(A)$$

$$\text{tr}(I_n) = n \quad \text{tr}(A+B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$$

דטרמיננטה - $\det A$ - $|A|$ - Determinant

$$1. \text{ שורת אפסים} \Rightarrow \det A = 0$$

$$2. \text{ כפל שורה בסקלר } c \Rightarrow c \cdot \det A$$

$$3. \text{ שתי שורות זהות} \Rightarrow \det A = 0$$

$$4. \text{ החלפת שורה} \Rightarrow \text{שינוי סימן}$$

$$5. \text{ הוספת כפולה} \Rightarrow \text{לא משנה}$$

$$6. \text{ כל התכונות הנ"ל גם לגבי עמודות.}$$

$$\text{עבור ריבועי } |A| = |A^t|$$

$$\text{עבור משולשות } |A| = \text{הכפלת אב' האלכס'}$$

$$\text{לכל שתי מטריצות } |AB| = |A||B|$$

$$A \text{ ריבועית הפיכה} \Leftrightarrow \det A \neq 0$$

$$\det(A^k) = (\det A)^k$$

$$\det(P^{-1} A P) = \det(A)$$

$$\det[(P^{-1} A P)^k] = \det(A^k)$$

$$|cA| = c^n |A|$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n+4)(n-1)}{2}}$$

סכום של $U, W \subseteq V$ תת מרחבים של V :⁷⁹
 (1) $U+W$ ת"מ של V .
 (2) $W \subseteq V+W$, $U \subseteq V+W$ (3-1)

ת"מ של V : $V+W \subseteq L \Leftrightarrow W \subseteq L \wedge U \subseteq L$

$U, W \subseteq V$ תת מרחבים של V :⁸⁰
 $U+W = Sp(S \cup T) \Leftrightarrow W = Sp(T) \wedge U = Sp(S)$

תמיד: $A, B \subseteq V$ (1) $Sp(A) \subseteq Sp(B)$
 (2) $Sp(A) \cup Sp(B) \subseteq Sp(A \cup B)$ T10/ans

משפט המימדים:

$dim(U+W) = dim U + dim W - dim(U \cap W)$
 $U \cap W \subseteq U, W \subseteq U+W$ ¹⁰⁸ נוצר סופית

$U=W \Leftrightarrow dim(U)=dim(W) \wedge U \subseteq W$ ¹¹⁰

סכום הישר ⁸⁰ אם $U, W \subseteq V$ ת"מ של V
 $V \cap W = \{0\} \wedge L = U+W \Leftrightarrow L = U \oplus W$

$span(A) = span(B) \Leftrightarrow A \subseteq span(B)$ ^{T9/sol}
 וגם $span(A) \subseteq span(B) \wedge span(B) \subseteq span(A)$

פעולות **אלמנטריות** על קבוצה פורשת אינו משנה את התת-מרחב הנפרש. ⁸²

תת-מרחבים ידועים

(1) קבוצת פתרונות של מערכת הומוגנית
 (2)

בסיסים - קל לזכור: ⁸⁸ (:

ראו גם סיכום של מני ב-HW10.

$U=V \Leftrightarrow dim U = dim V$ של U ת"מ של V ⁹³

בסיס של W : (כל בסיס בגודל $dim W$) ^{HW11}
 = תת קבוצה של W פורשת מינימלית
 = תת-קבוצה של W בת"ל מקסימלית

אם $dim(W)=n$ ^{T11/2}

(1) תת קבוצה של W בגודל $n+1 \leq$ תלויה לינארית
 (2) תת קבוצה של W בגודל $n-1 \geq$ לא פורשת
 (3) $\{v_1 \dots v_n\} \subseteq W$ בסיס $\Leftrightarrow$ בת"ל $\Leftrightarrow$ פורשת.
 קבוצה המכילה את וקטור ה-0 היא תלויה.

צמודה - $adj(A)$ - Adjugate

$$[adj A]_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ji}| \quad T8/7, 64$$

אם $det A \neq 0$ אז $A \cdot \left[\frac{1}{|A|} adj(A) \right] = I$ (ריבועית)

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj A = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad 65$$

$$A(adj A) = (adj A)A = (det A) \cdot I \quad 65$$

$$|adj A| = |A|^{n-1} \quad T8/8$$

לפתור מערכת:

$$x = A^{-1}b \Leftrightarrow Ax = b$$

$$(det A) \cdot I \cdot x = adj A \cdot b \Leftrightarrow (adj A)Ax = adj A \cdot b$$

אם $det A \neq 0$ אז $x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$ (שיטת קרמר) ⁶⁷

כללי:

$$I_m A = A I_n = A$$

$$\left(\begin{array}{l} (1-x)(1+x+x^2+\dots+x^{n-1}) = 1-x^n \\ 1+x+x^2+\dots+x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x} \end{array} \right)$$

כל ריבועי: $(I-A)(I+A+\dots+A^{n-1}) = I-A^n$ ^{6/sol}

מרחבים

הבוחן לתת-מרחב: אם $W \subseteq V$ ו- $W \neq 0$
 ו- $\alpha w_1 + \beta w_2 \in W$ לכל $w_1, w_2 \in W$. ⁷²

אם V מ"ו, $A \subseteq V$ (תת קבוצה סופית ולא ריקה)
 (1) $Sp(A)$ תת מרחב של V . ⁷⁵

(2) $Sp(A) \subseteq V$, $A \subseteq Sp(A)$ ו- $Sp(A)$
 התת מרחב הקטן ביותר שמכיל את A ⁷⁷

להוכיח ש- $Sp(A) \subseteq W$ כאשר W תת-מרחב
 מספיק לראות ש- $A \subseteq W$ ^{T10/3}

$$Sp(A) \subseteq Sp(B) \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A, B \subseteq V \quad T10/sol, 77$$

חיתוך/איחוד של $U_1, U_2 \subseteq V$ ת"מ של V :

תמיד תת מרחב ⁷⁸ $U_1 \cap U_2$
 $U_2 \subseteq U_1 \vee U_1 \subseteq U_2 \Leftrightarrow$ ת"מ $U_1 \cup U_2$ ⁷⁹

מטריצות $AB=0$ אז $\rho(A) \leq \rho(B)$ T13/7
 $\rho(A) \leq \rho(B)$ T13/7

$$\rho(AB) \leq \min[\rho(A), \rho(B)]$$

ולכל A אם $\rho(A)=0$ אז $A=0$ T13/10

מימדים כלליים: $\dim \mathbb{R}^n = n$

$$\dim M_n(\mathbb{R}) = n^2 \quad \dim \mathbb{R}_n[x] = n+1$$

A מסדר $(k \times n)$ ו- B מסדר $(n \times n)$ אזי $\rho(AB) \leq \rho(A)$ וגם $\rho(AB) \leq \rho(B)$ T105

$$\rho(A) = n \Leftrightarrow \text{הפיכה } n \times n \text{ } A$$

לכן אם $\rho(A^2) < \rho(A)$ אז A סינגלורית

$$\rho(AB) = \rho(B) : (n \times m) \text{ } B \text{ ולכל}$$

$$\rho(CA) = \rho(A) : (k \times n) \text{ } C \text{ מסדר ולכל} T106$$

מרחב הפתרונות / null(A) / null space

$$N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\} \quad k \times n \text{ מטריצה}$$

$$N(A) \text{ תת מרחב של } \mathbb{R}^n T101$$

$$\dim(N(A)) = n - \rho(A) = \begin{cases} \text{מספר המשתנים} \\ \text{בחופשיים בערכת} \end{cases}$$

וקטור קואורדינטות

$$[\alpha v + \beta w]_B = \alpha[v]_B + \beta[w]_B T113$$

$$[v]_B = \lambda_1[w_1]_B + \dots + \lambda_k[w_k]_B \Leftrightarrow v = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_k w_k$$

$$\{w_1, \dots, w_k\} \subseteq V \text{ ב"ת אם"ם } [w_1]_B, \dots, [w_k]_B \text{ ב"ת.}$$

$$\{w_1, \dots, w_k\} \subseteq V \text{ פורשת את } V \text{ אם"ם} \\ \{[w_1]_B, \dots, [w_k]_B\} \text{ פורשת את } \mathbb{R}^n$$

B, C בסיסים של V . M מטריצת המעבר מ- B ל- C .

$$[v]_C = M^{-1}[v]_B \text{ לכל } v \in V T115$$

$$[v_1]_C, \dots, [v_k]_C = M^{-1} : B \text{ מעביר מ-} C \text{ ל-} B T116$$

מרחב שורות ומרחב עמודות

$$A \text{ } k \times n \text{ אז } R(A) \subseteq \mathbb{R}^n \text{ ו- } C(A) \subseteq \mathbb{R}^k T96$$

דרגת השורות = מס' שורות בת"ל מקס ב- A

$$\dim R(A) = \text{מס' השורות } 0 \neq \text{אחרי דירוג}$$

$$Ax = b \text{ או מס' משתנים תלויים ב-} T97$$

$$\text{Span של שורות אלו} = R(A)$$

$$\dim C(A) = \text{מס' עמודות ב-} PA \text{ עם פותח} T98$$

מצב התלות בעמודות A ו- PA מדורגת זהה T97

עמודות עם 1 פותח ב- PA בסיס ל- $C(PA)$

עמודות באותו המקום של הנ"ל בסיס ל- $C(A)$

$$\dim C(P) = \dim C(PA) \text{ ובד"כ } C(P) \neq C(PA) T101$$

נדרג קבוצי את מטריצה A ונקבל PA . T97

$$R(A) = Sp \left\{ \begin{array}{l} \text{כל השורות ב-} PA \\ \text{שלא כל איבריה אפסים} \end{array} \right\}$$

דרגה שורות = מס' שורות אלו.

העמודות ב- PA עם איברי פותח הן בת"ל, והשאר צ"ל

שלם. העמודות ב- A באותם המקומות אותו דבר.

$$C(A) = Sp \left\{ \begin{array}{l} \text{העמודות ב-} A \text{ באותו במקום} \\ \text{של העמודות ב-} PA \text{ של אברי פותח} \end{array} \right\}$$

השאר צירופי לינראית עם אותם מקדמים של PA

עמודות אלו ב- A הם גם הבסיס T11/2

RANK / דרגה

$$\rho(A) = \text{rank}(A) = \dim C(A) = \dim R(A) T99$$

$$\dim C(A) = \text{מס' האיברים הפותחים ב-} PA \text{ המדורגת}$$

$$\dim R(A) = \text{מס השורות הבת"ל ב-} PA =$$

$$\text{במטריצה } n \times k : \text{rank}(A) \leq \min(n, k) T99$$

$$C(A) \subseteq \mathbb{R}^k \quad R(A) \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$\dim R(A) \leq \dim \mathbb{R}^n = n \quad \dim C(A) \leq \dim \mathbb{R}^k = k$$

אינדקס

3.....פתרון	ב
12.....פתרון טריביאלי	72.....בוחן לתת-מרחב
צ	85.....בלתי תלוי
75.....צירוף לינארי	88.....בסיס
ק	88.....בסיס הסטנדרטי
75.....קבוצה הנפרשת	ד
6.....קנונית	124.....דה מואבר
ש	49.....דטרמיננטות
121.....שדה	97.....דרגת השורות
66.....שיטת קרמר	ה
ת	99.....הדרגה של A
84.....תלויה לינארית	12.....הומוגנית
50.....תמורה	34.....המטריצה At
73.....תת מרחבים	53.....המינור
78.....איחוד תת מרחבים	75.....התת-מרחב הנפרש
A	ו
12.....Augmented Matrix	3.....וקטור
D	ח
49.....Determinants	78.....חיתוך של תת מרחבים
d	מ
89.....dim(V)	5.....מטריצה
L	64.....המטריצה הצמודה
47.....L	36.....מטריצה היחידה
M	37.....מטריצה הפיכה
.....Matrix	12.....מטריצה מצומצמת
37.....רגולרית	47.....מטריצה משולשית
36.....Identity Matrix	47.....משולשית מתוקנת
37.....Invertible matrix	47.....משולשית עליונה
47.....Lower triangular	47.....משולשית תחתונה
47.....Triangular matrix	34.....סימטרית
47.....Unitriangular	35.....
47.....Upper triangluar	12.....מורחבת
n	89.....ממד
3.....n-יה סדורה	68.....מרחבים לינאריים
101.....null(A)	34.....משוחלפת
r	משפט
99.....rank(A)	16.....משפט הקוסינוס
s	משתנה
75.....sp(A)	9.....חופשי
75.....span(A)	17.....מכפלה הסקלרית
T	9.....קשור
34.....Transpose	נ
U	15.....נורמה
47.....U	ס
□	106.....סינגולרית
99.....p(A)	פ

