

מתמטיקה בדידה

מהתירגולים של מר' עידו סמט

מרכז הבינתחומי הרצליה

סמסטר א', שנה א', 2009

28.....	שיעור 8 - 11.12.09	1.....	שיעור 1 - 23.10.09
31.....	שיעור 9 - 18.12.09	1.....	חיבור טענות.
32.....	שיעור 10 - 25.12.09	5.....	שיעור 2 - 30.10.09
33.....	יחסים	6.....	כמתים
36.....	שיעור 11 - 01.01.09	9.....	שיעור 3 - 06.11.09
36.....	יחס שקילות.	12.....	שיעור 4 - 13.11.09
39.....	שיעור 12 - 08.01.10	14.....	פונקציות.
40.....	הסגור הטרנזיטיבי.	17.....	שיעור 5 - 20.11.09
42.....	שיעור 13 - 15.01.10	18.....	פונקציות הפכיות.
42.....	שידוכים	20.....	שיעור 6 - 27.11.09
43.....	בקשות.	20.....	קומבינטוריה.
		24.....	שיעור 7 - 04.12.09

תאריך עדכון אחרון של קובץ זה הוא

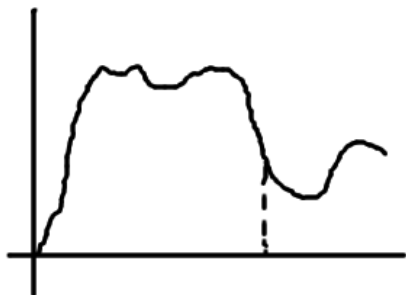
חמישי, 04פברואר, 2010

עדכונים וכתב הויתור (שווה לקרוא) נמצאים באתר

<http://idc.gadi.cc/compsci/>

הסיכומים הוכנו ע"י גדי כהן
סטודנט לתואר מדעי המחשב

שיעור 1 - 23.10.09



עדו סמט

isamet@idc.ac.il

- שאלה 1 להגיש ביום ב' בשיעור
- היתר - הגשה החדר עבודות עד סוף יום ה'.

טענות מתמטיות:

טענה מתמטית היא אמירה שהיא אמיתית או שקרית ורק אחד מן השניים.

דוגמאות:

- $2=3$ כן טענה מתמטית
- $3=3$ כן טענה מתמטית
- $1+\square=\square+1$ חסר משמעות
- $2^x=x^2$ כל עוד לא מוסכם מה מייצג x זה לא טענה.

מילות נרדפות:

- טענה אמיתית
- טענה נכונה
- טענה מתקיימת

חיבור טענות

כשנתן טענה א, ב ניתן ליצור טענות חדשות:

- "לא א" א הוא שלילי $\neg P$ שלילה
- "א וגם ב" שניהם אמת $P \wedge Q$
- "א או ב" לפחות אחד מהם אמת $P \vee Q$
- "אם א אז ב" אמת, חוץ מ- $T \rightarrow F$ $P \rightarrow Q$ גרירה

הגדרה: שתי טענות נקראות **שקולות לוגית** אם בכל אפשרות ל"פרכי אמת" של "האטומים" הן מקבלות אותו "ערך אמת".

תרגיל: הראו שהטענות $P \rightarrow Q$ ו- $(\neg P) \vee Q$ שקולות לוגית.

פתרון: נבנה טבלת אמת משותפת לשתי הטענות:

P	Q	$P \rightarrow Q$	$(\neg P) \vee Q$
T	T	T	$F \vee T = T$
T	F	F	$F \vee F = F$
F	T	T	$T \vee T = T$
F	F	T	$T \vee F = T$

רואים בטבלה שבכל אחת המשורות הערך של הטענות $P \rightarrow Q$ ו- $(\neg P) \vee Q$ שווים ולכן הטענות שקולות לוגית.

מהי הוכחה

הוכחה היא אמצעים לשכנע את עצמנו או את זולתנו בנכונותה של טענה.

כיצד מראים שטענה שיקרית?
מוכיחים את שלילתה.

תרגול:

ידוע כי הטענות הבאות נכונות (לגבי הקוטב הצפוני שלשום בחצות)

1. $\overbrace{P}^{\text{מעונן}}$ או $\overbrace{Q}^{\text{גשם}}$ שלא יורד

2. לא $\overbrace{P}^{\text{מעונן}}$

3. יורד גשם או שיבש בחוץ.

הוכיחו שיבש בחוץ.

הוכחה:

יודעים שלא מעונן או וכמו כן יודעים שמעונן או שלא יורד גשם.
מכאן נסיק שלא יורד גשם.

טיוטא:

	P	Q	$\neg P$	$P \vee (\neg Q)$	$\neg Q$
	T	T	F	T	F
	T	F	F	T	T
	F	T	T	F	F
$\rightarrow$	F	F	T	T	T

עתה יודעים שלא יורד גשם
וכן שיורד דשם או שיבש בחוץ
לכן נסיק שיבש בחוץ. ■

תרגיל:

יהי x מספר ממשי מסוים הידוע לי. הנה שתי טענות:

(1) אם $x=2$ אז $x^2-4x+4=0$

(2) אם $x^2-3x+2=0$ אז $x=1$

פתרון:

הטענה נכונה. הוכחה

1. (במקרה שבו $x \neq 2$ הטענה נכונה לכן...)

נניח ש- $x=2$ אז

$$x-2=0$$

$$(x-2)^2=0^2 \quad \text{לכן}$$

$$x^2-4x+4=0 \quad \text{כלומר}$$

$$\text{לכן הראינו שאם } x=2 \text{ אז } x^2-4x+4=0.$$

2. לא ניתן להוכיח את הטענה או את שלילתה מבלי לדעת מהו x .

נדגים שני מקראים:

1. במקרה שבו $x=2$

$$x^2-3x+2=0$$

$$\text{אז } x \neq 1$$

ולכן הטענה שקרית.

2. במקרה בו $x=5$

$$x^2-3x+2 \neq 0$$

ולכן הטענה נכונה.

שיעור 2 - 30.10.09

מהי השלילה של טענה מהצורה "אם א אז ב" ?

הצאות:

(3) אם א' אז לא ב'

(1) אם לא ב' אז א'

(4) א' וגם לא ב'

(2) אם לא ב' אז לא א'

		הטענה	שלילת הטענה	הצאה 1	הצאה 2	הצאה 3	הצאה 4
P	Q	$P \rightarrow Q$	$\neg(P \rightarrow Q)$	$\neg Q \rightarrow P$	$(\neg Q) \rightarrow (\neg P)$	$P \rightarrow (\neg Q)$	$P \wedge (\neg Q)$
T	T	T	F	T	T	F	F
T	F	F	T	T	F	T	T
F	T	T	F	T	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T	F

הטענה	$P \rightarrow Q$	שקולה לוגית ל-	$(\neg P) \wedge (Q)$
לכן השלילה שלה	$\neg(P \rightarrow Q)$	שקולה לוגית ל-	$\neg(\neg P \vee Q)$
לפי כלל דה מורגן	הביטוי	שקולה לוגית ל-	$\neg((\neg P) \wedge (\neg Q))$
ולכן	הביטוי	שקולה לוגית ל-	$P \wedge (\neg Q)$

שאלה ג 4

טענה: אם (א רציונלי), אז (ע רציונלי או $x+y$ אי רציונלי).

טענה זו שקולה לטענת ה-contrapositive.

הוכחה א:

אם (ע אי רציונלי וגם $x+y$ אי רציונלי), אז (א אי רציונלי). (אחרי דה מורגן)

נניח ש-א רציונלי.

הוכחה ב:

נראה ש-ע רציונלי או $x+y$ אי רציונלי.

נחלק למקרים.

(1) ע רציונלי.

במקרה זה הטענה ע רציונלי או $x+y$ אי רציונלי כמובן נכון.

(2) y אי רציונלי.
נראה שבמקרה זה $x+y$ אי רציונלי.

נוכיח זאת עם דרך השלילה.
נניח ש- $x+y$ רציונלי.

במקרה זה $y=(x-y)+(-x)$
שהיא סכום של שני מספרים רציונלים.

הוכחנו שסכום כזה הוא מספר רציונלי,
לכן y רציונלי. וזו סתירה להנחה.

הגענו לסתירה,
לכן נסיק ש- $x+y$ אי רציונלי.

לכן האענה " y רציונלי או $x+y$ רציונלי" נכונה.

הראנו שבני המקרים היא נכונה.

בכללי - להוכיח שמהו נכון, נוכל לנסות להוכיח שהוא לא נכון
ולהגיע לסתירה - שזה אומר שהטענה המוקרית היא נכון.

כמתים

תזכורת: $1+x=x+1$ אינה טענה מתמטית.
אפשר ליצור מכך טענה מתמטית ע"י הוספת כמתים.

$$\forall x \in \mathbb{N}: 1+x=x+1 \quad (\text{לכל } x)$$

$$\exists x \in \mathbb{N}: 1+x=x+1 \quad (\text{קיים } x)$$

איך מוכחים טענות מכומתות?

1. "קיים x כך ש...."

צריך למצוא איבר (לא "דוגמה") שנקרא לו x (שמקיים את מה שרצינו).
"נקח $x = \underline{\hspace{2cm}}$ ונראה ש- x הזה מקיים את..."
(זו לא הדרך היחידה).

2. "לכל x מתקיים..."

מוכיחים שזה ("ה-...") נכון עבור ערך מסוים שנקרא x מבלי לדעת מהו.
 "יהי x כלשהו. נוכיח שהוא מקיים..."
 הוכחנו זאת ל-x שרירותי לכן נובע שלכל x מקיים..."

תרגיל: תסבירו את הטענות הבאות במילים פשוטים והוכיח אותם או את שלילתם.

$$1. \exists x \in \mathbb{N} (\exists y \in \mathbb{N} : x = y^2) \quad 3. \forall x \in \mathbb{N} (\exists y \in \mathbb{N} : x = y^2)$$

$$2. \forall x \in \mathbb{N} (\forall y \in \mathbb{N} : x = y^2) \quad 4. \exists x \in \mathbb{N} (\forall y \in \mathbb{N} : x = y^2)$$

פתרון:

$$1. \exists x \in \mathbb{N} (\exists y \in \mathbb{N} : x = y^2) \quad \text{"קיים } x \text{ טבעי וקיים } y \text{ טבעי כך ש-}(x=y^2)\text{"}$$

נקח $y=2, x=4$ (טבעיים). אז $x=y^2$.
 זה מראה שאכן קיים x טבעי וקיים y טבעי כך ש- $(x=y^2)$.

$$2. \forall x \in \mathbb{N} (\forall y \in \mathbb{N} : x = y^2) \quad \text{"לכל } x \text{ טבעי ולכל } y \text{ טבעי מתקיים } (x=y^2)\text{"}$$

נכתוב את השלילה: "קיים x טבעי וקיים y טבעי כך ש- $x \neq y^2$ ".
 הוכחה השלילה במקודם.

$$3. \forall x \in \mathbb{N} (\exists y \in \mathbb{N} : x = y^2) \quad \text{"לכל מספר טבעי יש שורש ריבועי טבעי"}$$

נכתוב את השלילה: "קיים x טבעי כך שבכל y טבעי $x \neq y^2$ ".
 השלילה נכונה.

$$4. \exists x \in \mathbb{N} (\forall y \in \mathbb{N} : x = y^2) \quad \text{"יש מספר טבעי שהוא השורש הריבועי של כל מספר טבעי"}$$

שלילת הטענה: "לכל y טבעי יש x טבעי כך ש- $x \neq y^2$ ".

הוכחת שלילת הטענה

יהי y מספר טבעי כלשהי.
 נראה שקיים x טבעי כך ש- $x \neq y^2$.

$$\text{נקח } x = y^2 + 1 \quad \text{אז ברור ש- } x \neq y^2$$

זה מראה שקיים x כנדרש. הראנו זאת עבור y שרירותי ולכן נובע שלכל y טבעי קיים x טבעי כך ש- $x \neq y^2$.

טענה: תהי A קבוצה אזי $\emptyset \subseteq A$

הוכחה: צריכים להראות שלכל x , אם $x \in \emptyset$ אז $x \in A$.

יהי x כלשהו.

נוכיח שאם $x \in \emptyset$ אז $x \in A$.

שיעור 3 - 06.11.09

"לכל משוואה ריבועית יש פתרון".

טענה:

לכל $a, b, c \in \mathbb{R}$
 קיים $d \in \mathbb{R}$ כך ש-
 אם $a \neq 0$ אז $ad^2 + bd + c = 0$

הוכחה:

נוכיח את השלילה:
 קיימת $a, b, c \in \mathbb{R}$ כך
 שלכל $d \in \mathbb{R}$ מתקיים
 $ad^2 + bd + c \neq 0$ וגם $a \neq 0$

נקח $a=0$ (מספר ממשי)
 לכן השלילת הטענה שקרית (A וגם B כש-A הוא F).
 ולכן הטענה המקורית נכונה.

שוויון

- (1) "נקח $x=4$ - מגדיר את x כמייצג של 4
- (2) "ונקח $y=x$ - y מייצג את 4.
- (3) "עכשיו $y=4$ - טענה מתמטית
- (4) " $x=y$ - גם טענה מתמטית

תרגיל:

הוכיחו או הפרכו:

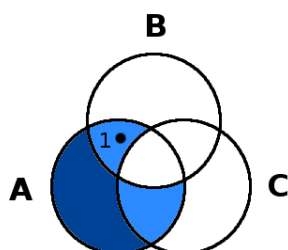
לכל קבוצות A, B, C

$$A \setminus (A \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

הוכחה:

נראה שקיימת קבוצות A, B, C
 כך ש- $A \setminus (A \cap C) \neq (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
 נקח $A = \{1\}$ $B = \{1\}$ $C = \emptyset$

נבדוק שאכן....



שאלה 4.ג. תהיינו A, B, C קבוצות.

הוכיחו שאם $A \subseteq B$ ו- $B \subset C$

אז $A \subset C$

הוכחה:

נניח ש- $A \subseteq B$ וגם $B \subset C$

נראה ש- $A \subset C$

כלומר ש- (1) לכל $x \in A$ מתקיים $x \in C$

(2) קיים $x \in C$ כך ש- $x \notin A$

(1)

יהי $x \in A$ כלשהו. נראה ש- $x \in C$.

הנחנו $A \subseteq B$ ולכן נובע $x \in B$

מההנחה $B \subset C$ נובע $x \in C$

x הוא שרירותי.

ולכן נסיק שלכל $x \in A$ מתקיים $x \in C$.

(2)

הנחנו ש- $B \subset C$.

לכן קיים $y \in C$ כך ש- $y \notin B$.

נקח y שכזה (נקח y כך ש- $y \in C$ וגם $y \notin B$)

נראה ש- $y \notin A$.

מההנחה $A \subseteq B$ נובע ש- $y \in B$.

זו סתירה לעובדה $y \notin B$.

לכן $y \notin A$.

האיבר y מראה שאכן קיים $x \in C$ כך ש- $x \notin A$.

■

תרגיל:

הוכיחו שלכל קבוצה A , $\emptyset \subseteq A$.

הוכחה:

יהיה A קבוצה כלשהי.

נראה שלכל x אם $x \in \emptyset$ אז $x \in A$.

יהי x כלשהי.

רוצים להראות שאם $x \in \emptyset$ אז $x \in A$.

מכיוון ש- $x \notin \emptyset$ זה אכן נכון.

x כלשהו....

A כלשהי...

■

תרגיל:

תהיינו A,B,C קבוצות.

נניח ש- $A \cap C = B \cap C = \emptyset$

הוכיחו ש- $A=B$ אם ורק אם $A \cup C = B \cup C$

הוכחה:

נתחיל בכיוון אחד:

אם $A=B$ אז $A \cup C = B \cup C$

זה ברור כשמש A,B מייצגות את אותה קבוצה

אז גם $A \cup C, B \cup C$ הן אותה קבוצה -

קבוצה המיוצגת ע"י A ו-B איחוד עם הקבוצה C.

נוכיח את הכיוון השני:

אם $A \cup C = B \cup C$ אז $A=B$.

נניח ש- $A \cup C = B \cup C$.

נראה ש- $A=B$ ע"י שנוכיח $A \subseteq B$ ו- $B \subseteq A$.

$$\underline{A \subseteq B}$$

נראה שבכל $x \in A$, $x \in B$

יהיה $x \in A$ כלשהו.

לכן $x \in A \cup C$ (מהגדרת האיחוד)

מההחנה $A \cup C = B \cup C$ נובע ש- $x \in B \cup C$

זה אומר ש- $x \in B$ או $x \in C$.

נניח בשלילה ש- $x \notin B$

מכיוון ש- $x \in B$ או $x \in C$ נובע מכך ש- $x \in C$.

אבל עכשיו $x \in A$ וגם $x \in C$

כלומר $x \in A \cap C$

סתירה.

לקחנו $x \in A$ כלשהו

ולכן נובע שלכל x ...

$$\underline{B \subseteq A}$$

הוכחה זהה - ע"י החלפת האותיות A,B.

שיעור 4 - 13.11.09

שאלה 5.א. A, B קבוצות. $A \subseteq B$ אם"ם $P(A) \subseteq P(B)$

הוכחה:

כיוון אחד

נניח ש- $A \subseteq B$ ונוכיח ש- $P(A) \subseteq P(B)$

יהי $x \in P(A)$ נראה ש- $x \in P(B)$

מהגדרת $P(A)$ נובע ש- $x \in A$

הראנו בשיעור שהכלה הוא טרנזיטיבית
כלומר מכך ש- $x \in A$ וגם $A \subseteq B$ נובע ש- $x \in B$. לכן $x \in P(B)$.
 x היה שרורתי ולכן נובע שלכל $x \in P(A)$, $x \in P(B)$.

כיוון שני

נניח ש- $P(A) \subseteq P(B)$ ונוכיח ש- $A \subseteq B$.

יודעים ש- $A \in P(A)$. מההנחה נובע ש- $A \in P(B)$. כלומר $A \subseteq B$.

■

שאלה 4:

תהינו A, B, C קבוצות.

הוכיחו $A=B$ אם $A \Delta C = B \Delta C$

הוכחה:

כיוון אחד:

אם $A=B$ אז $A \Delta C = B \Delta C$. טריוויאלי.

כיוון שני:

נניח ש- $A \Delta C = B \Delta C$, נראה ש- $A=B$.

ע"י שנוכיח ש- $A \subseteq B$ וגם $B \subseteq A$.

נתחיל ב- $A \subseteq B$

יהי $x \in A$ כלשהו. נראה ש- $x \in B$.

נזכור ש- $A \Delta C = (A \setminus C) \cup (C \setminus A)$

נחלק למקרים:

$$x \in C \quad (1)$$

במקרה זה, $x \in A \setminus C$ וגם $x \notin C \setminus A$. לכן $x \notin A \Delta C$.
 לפי ההנחה $A \Delta C = B \Delta C$ ולכן $x \notin B \Delta C$. בפרט $x \notin C \setminus B$.
 אבל $x \in C$ ולכן נובע ש- $x \in B$.

$$x \notin C \quad (2)$$

במקרה זה, $x \in A \setminus C$, ולכן $x \in A \Delta C$.
 לפי ההנחה $A \Delta C = B \Delta C$ ולכן $x \in B \Delta C$.
 אבל $x \notin C \setminus B$ כי $x \notin C$.
 לכן $x \in B \setminus C$ ובפרט, $x \in B$.

הוכחנו זאת עבור x שרירותי...

נותר להוכיח ש- $B \subseteq A$

זו אותה הוכחה בהחלפת האותיות A, B . ■

או גישה קצת שונה

הוכחנו: לכל קב' A, B אם $A' \Delta C = B' \Delta C$ אז $A' = B'$.
 אנחנו יודעים ש- $A \Delta C = B \Delta C$
 מהטענה שהוכחנו נובע ש- $A \subseteq B$ (עבור $A' = A$, $B' = B$)
 ומצד שני, נובע ש- $B \subseteq A$ (עבור $A' = B$, $B' = A$)
 לכן $A = B$. ■

דבר 2:

נניח $A \Delta C = B \Delta C$.

נזכיר כמה מהתכונות של הפרש סימטרי לכל קב' D, E, F :

$$(D \Delta E) \Delta F = D \Delta (E \Delta F) \quad (1)$$

$$D \Delta D = \emptyset \quad (2)$$

$$D \Delta \emptyset = D \quad (3)$$

מההנחה נובע ש- $(A \Delta C) \Delta C = (B \Delta C) \Delta C$
 מתכונה (1) נובע ש- $A \Delta (C \Delta C) = B \Delta (C \Delta C)$
 מתכונה (2) נובע ש- $A \Delta \emptyset = B \Delta \emptyset$
 מתכונה (3) נובע ש- $A = B$ ■

שאלה 6:

נניח ש- $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ מה ניתן לומר על הקשר בין A ולבין B? נסחו כטענה והוכיחו.

טענה: אם $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ אז $B \subseteq A$ או $A \subseteq B$

הוכחה:

נניח ש- $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$

יודעים ש- $A \cup B \in P(A \cup B)$

לכן מההנחה נובע ש- $A \cup B \subseteq A$ או $A \cup B \subseteq B$.

מכך נובע (אפשר לכתוב הוכחה קצרה) ש- $B \subseteq A$ או $A \subseteq B$.

פונקציות

הסבר:

מה מגדיר פונקציה f?

שתי קבוצות: תחום וטווח. מסמנים $f: \underbrace{A}_{\text{תחום}} \rightarrow \underbrace{F}_{\text{טווח}}$

ו"כלל התאמה" שמתאים לאיברים בתחום איבר יחיד בטווח.

בד"כ, הכלל ניתן ע"י נוסחה מהצורה $f(x) = \text{משווא}$

המשמעות היא שלכל x השייך לתחום,

שעבורו הביטוי בצד ימין מגדיר באופן יחיד איבר בטווח,

$f(x)$ מוגדרת על פי הנוסחה הנתונה.

תרגיל:

נתבונן בפונקציות הבאות,

נקבע מהו תחום ההגדרה והתמונה, האם הן חח"ע או על:

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & x \text{ זוגי} \\ \frac{x+1}{2} & x \text{ אי זוגי} \end{cases} \quad .1$$

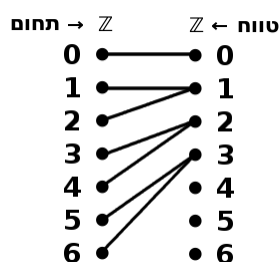
$$A = \{1, 2, 3\} \quad \varphi: A \times A \rightarrow P(A) \quad \varphi((x, y)) = \{x, y\} \quad .2$$

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & x \text{ זוגי} \\ \frac{x+1}{2} & x \text{ אי-זוגי} \end{cases} \quad 1.$$

תחום ההגדרה:

לכל $x \in \mathbb{Z}$, אם x זוגי אז $\frac{x}{2} \in \mathbb{Z}$, אחרת $x+1$ זוגי ולכן $\frac{x+1}{2} \in \mathbb{Z}$.

ובכל מקרה $f(x)$ מוגדרת היטב כאיבר בטווח. לכן תחום ההגדרה הוא $\mathbb{Z}$.



$$\{t \in \mathbb{Z} \mid \exists x \in \mathbb{Z} : f(x) = t\}$$

טווח תחום

התמונה מוגדרת

("כל האיברים בטווח שיש להם מקור")

התמונה היא $\mathbb{Z}$ כלומר היא על. נוכיח זאת:

נראה שלכל $b \in \mathbb{Z}$ (הטווח) קיים $a \in \mathbb{Z}$ (בתחום), כך ש- $f(a) = b$.

יהי $b \in \mathbb{Z}$ כלשהו. נראה שקיים $a \in \mathbb{Z}$ כך ש- $f(a) = b$.

נקח $a = 2b$ אז $a \in \mathbb{Z}$ ו- a זוגי לכן $f(a) = \frac{a}{2} = \frac{2b}{2} = b$.

f אינו חח"ע.

ההגדרה מתי f חח"ע: לכל $a, b \in \mathbb{Z}$ (תחום) אם $f(a) = f(b)$ אז $a = b$.

מתי f לא חח"ע? כאשר קיימים $a, b \in \mathbb{Z}$ כך ש- $a \neq b$ וגם $f(a) = f(b)$.

נקח $a=1, b=2$, אז $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq b$, וגם $f(a) = f(b) = 1$.

$$A=\{1,2,3\} \quad \text{כאשר } \varphi: A \times A \rightarrow P(A) \quad \varphi((x,y))=\{x,y\} \quad .2$$

תחום ההגדרה הוא $A \times A$.

לכל $t \in A \times A$ קיימים $x, y \in A$ כך ש- $f=(x,y)$ ועבורם מוגדר $\varphi(t)=\varphi((x,y))=\{x,y\}$ כקבוצה המוכלת ב- A , כלומר כאיבר בטווח.

התמונה הוא $\{\{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

φ אינה חח"ע. נקח $a=(1,2)$ $b=(2,1)$
אז $a, b \in A \times A$ ו- $a \neq b$ וגם $\varphi(a)=\varphi(b)=\{1,2\}$

φ אינה על.

כלומר, קיים $b \in P(A)$ כך שלכל $a \in A \times A$, $\varphi(a) \neq b$.

נקח $b=\emptyset$.

יהיה $a \in A \times A$, נראה ש- $\varphi(a) \neq b$.

קיימים $x, y \in A$ כך ש- $a=(x,y)$

נקח x, y כאלה.

אז $\varphi(a)=\{x,y\}$

לכן $x \in \varphi(a)$ ולכן $\varphi(a) \neq \emptyset$

שיעור 5 - 20.11.09

לכל ← יהי

קיים ← נקח

שאלה 4 ח': $D: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R} \quad D\left(\frac{a}{b}\right) = a$

האם הנוסחה הזו מתאימה לאיבר בתחום איבר יחיד בטווח?

התמונה המתאימה ל- $\frac{1}{2}$? $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} \dots$

נסוה לא מגדירה את התמונה הצורה יחידה וחד משמעית.

האיבר היחיד עבורו D מוגדרת היא 0 : $D(0) = 0$

מה היה אפשר לכתוב?

1. זה לא פונקציה.

2. תחום ההגדרה הוא $\{0\}$. הפונקציה אינה מלאה.

שאלה 5: תהינה A, B, C קבוצות לא ריקות. $g: B \rightarrow D, f: A \rightarrow C$ פונקציות מלאות.

נגדיר $h: A \times B \rightarrow C \times D \quad h((a, b)) = (f(a), g(b))$

נוכיח: h חח"ע ועל אם f, g שתיהן חח"ע ועל.

($\Leftarrow$) נוכיח שאם f, g על אז h על.

בניח ש- f, g על

נראה לכל $y \in C \times D$ קיים $x \in A \times B$ כך ש- $h(x) = y$

יהי $y \in C \times D$ כלשהו. y הוא זוג סדור.

כלומר אפשר להחת $c \in C, d \in D$ כך ש- $y = (c, d)$.

($\otimes$) זה בסדר אם C ריקה - נוכל לחלק למקרים ונקבל סתירה. אין צורה לכתוב

הנתון ש- f על, לכן קיים $a \in A$ כך ש- $f(a) = c$.

הנתון ש- g על, לכן קיים $b \in B$ כך ש- $g(b) = d$.

נקח a, b כאלה.

נקח $x = (a, b) \in A \times B$

ועכשיו $h(x) = h((a, b)) = (f(a), g(b)) = (c, d) = y$

כלומר, הראנו שקיים x כנדרש. y שרירותי....

(עד כה לא השתמשנו בהנחה שהקבוצות אינם ריקות).

($\Rightarrow$) נוכיח שאם h על אז f על.

{הגדרה}

נניח ש- h על. נראה ש- f על.

יהי $y \in C$. נראה שקיים $x \in A$ כך ש- $f(x) = y$.

נקח $z \in D$. זה אפשרי כי D אינה ריקה.

עכשיו $(y, z) \in C \times D$

לפי ההנחה h על.

לכן קיים $t \in A \times B$ כך ש- $h(t) = (y, z)$.

נקח t כזה. t זוג סדור.

נקח $w \in B, x \in A$ כך ש- $t = (x, w)$.

$$h(t) = h((x, w)) = (f(x), g(w)) = (y, z)$$

אומר בפרט ש- $f(x) = y$ כלומר מצאנו x כנדרש.

פונקציות הפכיות

הגדרה: תהי $f: A \rightarrow B$ פונקציה.

פונקציה $g: B \rightarrow A$ המקיימת $f \circ g = i_B$ נקראת הפכית ימנית של f

פונקציה $g: B \rightarrow A$ המקיימת $g \circ f = i_A$ נקראת הפכית שמאלית של f

משפט: תהי $f: A \rightarrow B$:

1. f חח"ע אם"ם קיימת ל- f הפכית שמאלית.

2. f על אם"ם קיימת ל- f הפכית ימנית.

תרגיל: תהיינו $g: B \rightarrow C, f: A \rightarrow B$

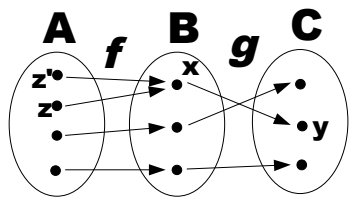
1. הוכיחו שאם $g \circ f$ על, אז g על.

2. נניח $g \circ f$ על. האם נובע בהכרח ש- f על?

3. הוכיחו שאם f, g על אז $g \circ f$ על.

$$g: B \rightarrow C, f: A \rightarrow B$$

1. הוכיחו שאם $g \circ f$ על, אז g על.

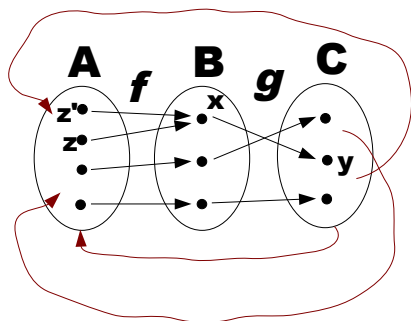


נניח ש- $g \circ f$ על. נראה ש- g על.
יהי $y \in C$. נראה שקיים $x \in B$ כך ש- $g(x) = y$.

לפי ההנחה, $g \circ f$ הוא על.
לכן קיים $z \in A$ כך ש- $g \circ f(z) = y$
נקח y כזה.

נקח $x = f(z) \in B$ ומתקיים $g(x) = g(f(z)) = g \circ f(z) = y$
מצאנו x כדרוש.

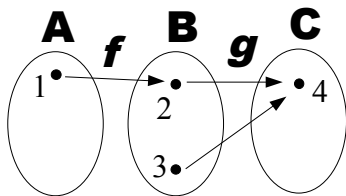
או הוכחה אחרת:



נניח ש- $g \circ f$ הוא על.
לפי משפט, קיימת הפכית מניית ל- $g \circ f$
נקח $h: C \rightarrow A$ כך ש- $(g \circ f) \circ h = i_C$
נראה ש- g על ע"י כך שנמצא הפכית ימית ל- g .

נקח $k: C \rightarrow B$ אז, $k = f \circ h$
ומתקיים $g \circ k = \underbrace{g \circ (f \circ h)}_{\text{אסוציאטיביות}} = (g \circ f) \circ h = i_C$

2. נניח על. $g \circ f$ האם נובע בהכרח ש- f על?



לא. נקח למשל $A = \{1\}$ $B = \{2, 3\}$ $C = \{4\}$

נגדיר $f: A \rightarrow B$ $f(1) = 2$
נגדיר $g: B \rightarrow C$ $g(2) = 4, g(3) = 4$

עכשיו $g \circ f$ על אך f אינה על.

3. הוכיחו שאם f, g על אז על. $g \circ f$

נניח f, g על.
נראה ש- $g \circ f$ על.

f על ולכן לפי המשפט יש לה הופכית ימנית.
נקח כזו. $h: B \rightarrow A$ כך ש- $f \circ h = i_B$
גם g על. נקח $k: C \rightarrow B$ כך ש- $g \circ k = i_C$

נראה ש- $h \circ k$ היא הופכית ימנית $g \circ f$. מהמשפט נסיח ש- $g \circ f$ היא על.
ואכן, $(g \circ f) \circ (h \circ k) = \underbrace{g \circ (f \circ h)}_{\text{אסוציאטיביות}} \circ k = \underbrace{g \circ i_B}_{\text{תכונה של פונק' הזהות}} \circ k = g \circ k = i_C$

שיעור 6 - 27.11.09

שאלה 4: תהיו $f, g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ לכל $x \in \mathbb{Z}$ $f \circ g(x) = 2x + 1$

ההרכבה $f \circ g$ היא חח"ע ואינה על.

משאלה 3 נובע ש- g חח"ע.

מהתרגיל שעשינו לפני שבוע נובע ש- f אינה על או g אינה על.

דוגמה עם פונקציה הזהות:

ניקח $f(x) = 2x + 1$ (מוסכם שלא צריך כמת, x בכל התחום של $f(x)$)

וגם $g = i_{\mathbb{Z}}$

ואז $f \circ g(x) = 2x + 1$ לכל $x \in \mathbb{Z}$ ו- f אינה על.

טענה: אם f, g כנ"ל ובנוסף g על אז f חח"ע.

הוכחה: g היא על לפי ההנחה, ו- g חח"ע ראינו.

לכן יש ל- g הופכית (יהידה) המוסמנת g^{-1} .

g^{-1} היא חח"ע (וגם על)

(כי g היא ההפכית שלה)

ההרכבה של $f \circ g$ ושל g^{-1}

היא הרכבה של פונקציות חח"ע ולכן היא חח"ע.

אך $(f \circ g) \circ g^{-1} = f \circ (g \circ g^{-1}) = f \circ i_{\mathbb{R}} = f$

כלומר f חח"ע.

קומבינטוריה

שאלה: כמה איברים יש ב- $A \setminus B$?

תרגיל: תהיינה A, B קבוצות.

אם $B \subseteq A$ אז $|A \setminus B| = |A| - |B|$

הוכחה: נתבונן בקבוצות $A \setminus B, A \cap B$.

$(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$ ו- $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset$

לפי כלל הסכום $|A \setminus B| + |A \cap B| = |(A \setminus B) \cup (A \cap B)| = |A|$

אין לי את הקטע הזה, אעריך את זה מאוד אם מישהו תשלח

א.

ב.

נסמן ב- X את קב' ה-13-יות שהן לסירוגין בן-בת.

נסמן ב- X_1 את קב' ה-13-יות שתחילה בבן.

נסמן ב- X_2 את קב' ה-13-יות שמתחילה בבת.

$$X_1 \cup X_2 = X$$

$$X_1 \cap X_2 = \emptyset \quad \text{כי סדרה המתחיל בבן אינו מתחיל בבת.}$$

$$|X| = |X_1| + |X_2| \quad \text{לכן לפי כלל הסכום}$$

$$X_1 = B \times G \times B \times \dots \times B \times G \times B \quad \text{עכשיו}$$

$$X_2 = G \times B \times G \times \dots \times G \times B \times G$$

$$|X_1| = |B|^7 \cdot |G|^6 = 7^7 \cdot 5^6 \quad \text{לפי כלל המכפלה}$$

$$|X_2| = |B|^6 \cdot |G|^7 = 5^6 \cdot 7^6$$

$$|X| = 7^7 \cdot 5^6 + 5^6 \cdot 7^6 \quad \text{לכן}$$

$$(\rightarrow \text{לא צריך}) \quad |X| = 7^6 \cdot 5^6 \cdot 7(7+5) = 12 \cdot 7^6 \cdot 5^6$$

ג.

נשתמש בכלל המכפלה המוכלל.

בשבוע הראשון יש 12 אפשרויות לבחור אחראי.

לכל בחירה של השבוע הראשון יש 11 אפשרויות לבחירה של אחראי לשבוע

הבא. וכן הלאה עד שבוע ה-13. לכן מספר האפשרויות הכלל הוא

$$12 \times 11 \times \dots \times 11 = 12 \cdot 11^{12}$$

ד.

נסמן ב- X את קב' כל הסידורים.

נסמן ב- Y את קב' כל הסידורים בהם זבולון לא מופיע.

אנו מעוניינים במניית אברי $X \setminus Y$, וכמובן $Y \subseteq X$.

$$|X \setminus Y| = |X| - |Y| \quad \text{לכן}$$

$$|X| = 12^{13} \quad \text{לפי כלל המכפלה}$$

$$|Y| = |(A \setminus \{\text{זבולון}\})^{13}| = 11^{13}$$

לכן מסק האפשרויות בהן הוא הבחר לפחות פעם אחת הוא $12^{13} - 11^{13}$

ה. בחירה שני אחראים (אולי זהות) זה סוג סדור ב- $A \times A$.

$$|(A \times A)^{13}| = (|A|^2)^{13} = 12^{26}$$

ו. לפי כלל המכפלה המוכלל זו

$$\underbrace{(\underbrace{12}_{\text{א' לכלוך}} \cdot \underbrace{11}_{\text{א' נקיון}})}_{\text{לא לעשות ככה}} 12 \times 11 \dots 12 \times 11 = 12^{13} \cdot 11^{13}$$

או להסביר במילים, או הגדרה פורמלית:

$$W = \{(x, y) \in A \times A \mid x \neq y\}$$

$$|W| = 12 \times 11$$

$$|W^{13}|$$

האוכל דג ביום דג ניצול מדג

תרגיל:

דייג דג דגים במשך 30 יום.
הוא דג לפחות דג אחד בכל יום ובסה"כ 45 דגים.
הוכיחו שיש רצף ימים שבהם הוא דג בסה"כ בדיוק 14 דגים.

פתרון:

נסמן ב- X_i את מספר הדגים שנידוגו עד היום ה- i , כולל.
הם בין 1 ל-45 מספרים שונים זה מזה כי בכל יום נוסף לפחות דג אחד.

נרשום על 60 פתקים את המספרים הבאים:

$$\begin{array}{ccccccc} X_1, & X_2, & X_3, & \dots, & X_{30} \\ X_1+14, & X_2+14, & X_3+14, & \dots, & X_{30}+14 \end{array}$$

המספרים הכתובים על הפתקים הם בין 1 ל- $45+14=59$

הפתקים = יונים המספרים בין 1 ל-59 = השבכים.
נתאים לכל פתק את המספר הראשון עליו.
יש 60 פתקים ו-59 מספרים אפשריים.

לכן לפי עקרון שבך היונים:
יש שני פתקים (לפחות) עליהם רשום אותו המספר.
על 30 הפתקים יש מספרים שונים זה מזה.
וכן גם על 30 הפתקים האחרונים.

לכן יש פתק עליו כתוב איזשהו X_i
ופתק עליו כתוב X_j+14
כך ש- $X_i = X_j+14$

זה אומר ש- $X_1 > X_2$
ולכן $i > j$
ו- $X_i - X_j = 14$

אומר שמספר הדגים שנידוגו מהיום ה- $j+i$ עד היום ה- j הוא בדיוק 14.

שיעור 7 - 04.12.09

שאלה 3

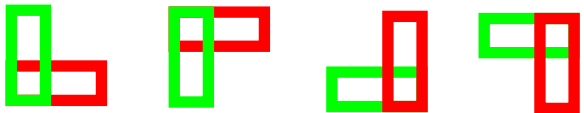
נסמן ב- C קבוצת הסידורים של שתי אבנים צבועות אדום וכחול על לוח שחמט ללא חפיפה.
 נסמן ב- C_1 את קבוצת הסידורים נ"ל הם האדומה מאוזנת
 נסמן ב- C_2 את קבוצת הסידורים נ"ל הם האדומה מאונכת
 אז $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ ו- $C_1 \cup C_2 = C$, ולכן $|C| = |C_1| + |C_2|$

נגדיר $f: C_1 \rightarrow C_2$ פונקציה המתאימה לסידור אבנים את הסידור המתקבל ע"י סיבוב הלוח ב- 90° עם כיוון השעון. לפונקציה הזאת יש הופכית: סיבוב 90° נגד כיוון השעות. לכן f חח"ע ועל, ולכן $|C_1| = |C_2|$.
 מכאן $|C| = 2|C_1|$

נברר מהו $|C_1|$
 נסמן ב- A את קבוצת הסידורים עם אדומה מאוזנת כולל סידורים עם חפיפה.
 נסמן ב- B את קבוצת הסידורים עם אדומה מאונכת שיש בהם חפיפה.
 אז $|C_1| = |A \setminus B| = |A| - |B|$

מהו $|A|$? ביצירת סידור ב- A :
 יש $8 \cdot 7$ אפשרויות לבחור את מיקום האדומה
 ו- $2 \cdot 8 \cdot 7$ אפשרויות לבחור את מיקום הכחולה (מאוזנת או מאונכת).
 לפי כלל המכפלה יש לנו $|A| = 8 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 7 = 2 \cdot (8 \cdot 7)^2$

מהו $|B|$? נחלק לפי צורת החפיפה (לקבוצת זרות).
 - חפיפה מלאה: $8 \cdot 7$ דרכים
 - חפיפה במאוזן. יש שתי צורות:

 יש סה"כ $2 \cdot 8 \cdot 6$ דרכים להניח.
 - חפיפה בניצב

 בסה"כ $4 \cdot 7 \cdot 7$

לכן $|B| = 8 \cdot 7 + 2 \cdot 8 \cdot 6 + 4 \cdot 7 \cdot 7$
 בסוף נקבל $|C| = 2|C_1| = 2(|A| - |B|)$

נסמן ב-D את קבוצת הסידורים של שתי אבנים זהות.
 נגדיר $f: C \rightarrow D$ שתתאים לסידור אבנים צבעים את אותו הסידורים ללא הצבעה.
 f היא 2-ל-1: בהנתן סידור של שתי אבנים ללא חפיפה וללא צבע בדיוק שתי דרכים
 לצבוע את האבנים ואלה שתי המקורות של סידור זה. לכן $|C| = 2|D|$, כלומר $|D| = \frac{1}{2}|C|$

בחנו את עצמכם

נניח היינו מסמנים ב-C,D כמקודם סידורים הכוללים סידורים עם הפיפה.
 האם הפונקציה f שהוגדרה לעיל היתה 2-ל-1?

הדרכה לבונוס

נסמן את איברי A כי $a_1, a_2, \dots, a_n$ (אמרו שיש n איברים)
 נתבונן במספרים $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + \dots + a_n$ ובשארית החלוקה שלהם ב-n.
 אם אחד משאריות החלוקה היא 0, מצאתי סכום איברים שמתחלק ב-n.
 אחרת - מעקרון שובך היונים נובע שיש שני מספרים שיש להם אותה שארית חלוקה ב-n.
 ההפרש בין שני המספרים הללו (בכיוון הנכון) הוא סכום איברים מתוך A והוא מתחלק ב-n.

עוד ספירה

- 1.** $n^k =$ מספר הדרכים לבחור k פעמים מתוך n עם חזרות ועם חשיבות לסדר.
- 2.** $\frac{n!}{(n-k)!} =$ מספר הדרכים לבחור k פעמים מתוך n בלי חזרות ועם חשיבות לסדר.
- 3.** $\# = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ הדרכים לבחור k פעמים מתוך n בלי חזרות ובלי חשיבות לסדר.
- 4.** $\# = \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$ דרכים לבחור k מתוך n עם חזרות ובלי חשיבות לסדר.

תרגיל:

באחד מבתי הספר בהרצליה יש 50 ילדים ו-5 כלובים ממוספרים.
בכמה דרכים ניתן לכלוא אותם:

- (א) בלי הגבלות
- (ב) כך שכלוב #1 לא ריק.
- (ג) כך שכלוב #1 יש בדיוק 3 ילדים.
- (ד) כך שבכל כלוב יש בדיוק 10 ילדים.
- (ה) כך שמרקס ומוריץ לא מאותו התא.
- (ו) בלי מגבלות אבל קופים זהים במקום ילדים.
- (ז) כמו ו' + אף תא אינה ריק.

פתרון:

(א) בלי הגבלות

(אנחנו בעצם בוחרים את הכלוב - בחוברים 50 פעמים מתוך 5 כלובים)
סידור ילדים בכלובים זו פונקציה מקבוצת הילדים לקבוצת הכלובים.
לכן יש 5^{50} סודורים כאלה.

(ב) כך שכלוב #1 לא ריק.

מספר האפשרויות בהן כלוב #1 ריק הוא 4^{50} לכן יש $5^{50} - 4^{50}$ אפשרויות בהן #1 לא ריק.
תרגיל: $50 \cdot 5^{49} = \#$ לחלק ילדים לתאים כך שבו #1 יהיה לא ריק וימונה אחראי לתא זה.

(ג) כך שכלוב #1 יש בדיוק 3 ילדים.

יש $\binom{50}{3}$ דרכים לבחור קבוצה של 3 ילדים שיוכנסו לתא #1.
ולכל אפשרות כזו יש 4^{47} דרכים לחלק את היתר.
סה"כ $\binom{50}{3} \cdot 4^{47} = \frac{50!}{3!47!} \cdot 4^{47}$

(ד) כך שבכל כלוב יש בדיוק 10 ילדים.

יש $\binom{50}{10}$ דרכים לבחור 10 ילדים לכלוב #1.
לכל אפשרות כזו יש $\binom{40}{10}$ דרכים לחבור 10 מבין הנותרים לכלוב #2 וכו'.
בסה"כ (כלל המכפלה מוכלל) יש $\frac{50!}{(10!)^5} = \frac{50!}{10!40!} \cdot \frac{40!}{10!30!} \cdot \frac{30!}{10!20!} \cdot \frac{20!}{10!10!} = \binom{50}{10} \binom{40}{10} \binom{30}{10} \binom{20}{10}$

ה) כך שמרקס ומוריץ לא מאותו התא.

מס' האפשרויות שבהן באותו התא - מחברים אותם לכדי יצור אחד, ומחלקים:

יש 5^{49} אפשרויות. לכן מס' הדרכים לחלק כך שיהיו בנפרד הוא:

$$5^{50} - 5^{49} = 5^{49}(5-1) = 5^{49} \cdot 4 = 5 \cdot 4 \cdot 5^{48}$$

ו) בלי מגבלות אבל קופים זהים במקום ילדים.

$$\underbrace{\binom{50+5-1}{5-1}}_{\text{התשובה היותר חשובה}} = \underbrace{\binom{54}{4}}_{\text{פחות חשובה}}$$

כמו מספר הדרכים לחלק 50 תפוזים ל-5 ילדים. יש

ז) כמו ו' + אף תא אינה ריק.

נחלק תפוז 1 לכל ילד.

ועתה נספור בכמה דרכים נותר חלק את היתר. $\binom{45+5-1}{5-1}$

שיעור 8 - 11.12.09

ממבחן המצע...

שאלה 2: יהיו $A = \{1,2,3,4\}$ $B = \{ \}$ מהו $\|(A \Delta B) \times A \cap B \times (B \Delta A)\|$?

פתרון: $A \Delta B = B \Delta A = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{1,2,5,6\}$
אפשר היה לכתוב את כל איברי המכפלות הקרטזיות ולמצוא "בידיים" את החיתוך.

דבר אחרת:

$$\begin{aligned} & ((A \Delta B) \times A) \cap (B \times (B \Delta A)) \\ * &= ((A \Delta B) \cap B) \times (A \cap (B \Delta A)) \\ &= (B \setminus A) \times (A \setminus B) = \{5,6\} \times \{1,2\} \end{aligned}$$

זו מכפלה קרטזית של שתי קבוצות עם שני איברים בכל אחת ולכן יש בה 4 איברים.

*טענה: לכל A, B, C, D קבוצות, $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

שאלה 4:

$f: A \rightarrow B$ $g: B \rightarrow C$
 $h: B \rightarrow A$ $k: C \rightarrow B$
כולו מלאות ו- $g \circ f$ על.

פתרון: $g \circ f$ על ולכן g היא על.

בניח ש- k הופכית שמאלית של g .
אז g חח"ע (לפי משפט שהוכחנו).
 g חח"ע ועל
ולכן g הפיכה והוכחנו שהופכית שמאלית שלה היא גם ההופכית ימנית שלה.
לכן k הופכית ימנית של g .

שאלה 5:

תהי $f: A \rightarrow B$ פונקציה.

בחרו את הטענה האומרת ש- f על (לא פחות ולא יותר).

- (א) לכל $x \in A$ קיים $y \in B$ כך ש- $f(x) = y$
 (ב) לכל $f(x) \in B$ קיים $x \in A$ מתאים.
 (ג) לא קיים $y \in B$ שעבורו לכל $x \in A$ מתקיים $f(x) \neq y$
 (ד) לכל y בתמונה של f קיים $x \in A$ כך ש- $f(x) = y$

פתרון:

(ב) אין למילה "מתאים" משמעות, וגם לא לחלק הראשון.

(א) זה אומר ש- f מלאה.

(ד) הגדרה של תמונה: $\{b \in B \mid \exists x \in A: f(x) = b\}$

טענה נכונה ש"לא אומרת הרבה"

פיסלנו את כל האוצפיות האחרות:

(ג) = לכל $y \in B$ קיים $x \in A$ כך ש- $f(x) = y$ - אומר שהפונקציה היא על.

שאלה 8:

תהי $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ פונקציה מלאה.

ידוע שלכל $n \in \mathbb{N}$, $f(2n) = n$

(א) הוכיחו ש- f אינו חח"ע.

הוכחה:

נראה שקיימים $x, y \in \mathbb{N}$ כך ש- $x \neq y$ וגם $f(x) = f(y)$.

נסמן (נקח) $k = f(1)$

נחפש $y \in \mathbb{N}$ כך ש- $f(y) = k$.

נקח $x = 1$.

f מלאה והטווח שלה הוא $\mathbb{N}$ לכן $f(1) \in \mathbb{N}$

לכן נוכל לקחת $y = 2 \cdot f(1) \in \mathbb{N}$

נבדוק שאכן $x \neq y$ וגם $f(x) = f(y)$

$x \neq y$ כי x אי זוגי ו- y זוגי.

לכן $f(y) = f[2 \cdot \underbrace{f(1)}_{\in \mathbb{N}}] = f(1) = f(x)$

$$g(n)=n+1, \quad g:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}\setminus\{0\} \quad (\text{ב})$$

נראה שלכל $b\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ קיים $a\in\mathbb{N}$ כך ש- $g(f(a))=b$

יהי $b\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$

$$a=2(b-1) \quad \text{נקח}$$

$$g(f(a))=g(f(2(b-1)))=g(b-1)=b-1+1=b \quad \text{ואז } a\in\mathbb{N} \quad \text{(נבדוק ש-)}$$

הוכחה ש-f על: נראה שלכל $b\in\mathbb{N}$ קיים $a\in\mathbb{N}$ כך ש- $f(a)=b$

יהי $b\in\mathbb{N}$. נקח $a=2b$ אז $a\in\mathbb{N}$ ו- $f(a)=f(2b)=b$

$$\sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1) \cdot 2^{n-2} \quad \text{יהי } n \text{ מספר טבעי. הוכיחו} \quad \text{תרגיל:}$$

הוכחה: נתאר בעיה קומבינטורית, אותן לפתור בשתי דרכים.

יש כיתה עם n ילדים. סופרים את מספר הדרכים לבחור אחראי כלוב וסגן לאחראי ועוד קבוצה בגודל כלשהו של ילדים שיוכנסו יחד איתם לכלוב. נסמן ב- b את המספר הזה.

נחשב את b בדרך אחת:

יש n אפשרויות לבחור אחראי.

לכל בחירה כזאת, יש $(n-1)$ אפשרויות לבחור סגן.

לכל בחירה כזאת, יש 2^{n-2} תתי קבוצות מקב' הילדים שנותרו, שניתן להכניס אותם.

$$b = n(n-1) \cdot 2^{n-2} \quad \text{לפי כלל המכפלה המוכלל:}$$

נספור בדרך שנייה:

מספר הילדים הכולל בכלוב הוא בין 2 ל- n .

נספור כמה אפשרויות ישנן בהם יש k ילדים בכלוב:

יש $\binom{n}{k}$ דרכים לבחור מי ייכנס לכלוב.

ולכל דרך כזו יש $k \cdot (k-1)$ לבחור אחראי וסגן.

לכן יש $\binom{n}{k} \cdot k \cdot (k-1)$ דרכים.

קבוצות הסיידורים עם מס' שונה של ילדים בכלוב הן זרות.

לכן לפי כלל סכום:

$$b = \binom{n}{2} \cdot 2 \cdot (2-1) + \binom{n}{3} \cdot 3 \cdot (3-1) + \dots + \binom{n}{n} \cdot n \cdot (n-1) = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \cdot k \cdot (k-1)$$

וזה שווה ל- $n(n-1) \cdot 2^{n-2}$ כפי שראינו.

שיעור 9 - 18.12.09

(רב תודות לנעה בן-צבי)

שיעור 10 - 25.12.09

(רב תודות לנעה בן-צבי)

הערות על התרגול

שאלה 2: סופרים פונקציות מהקבוצה $C = \{\text{כחול}, \dots, \text{ירוק}, \text{אדום}\}$ $|C|=10$ לקבוצה $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

בסעיף ב': סופרים פונקציות שהן על באופן הבא:

מגדירים: X - קבוצת כל הפונקציות מ- C אל N

B - קבוצת כל הפונקציות מ- C אל N שאינן על.

$B_1, \dots, B_6$ - קבוצת הפונקציות בהן $1, \dots, 6$ בהתאמה לא בתמורה

$$\text{ואז } |X \setminus B| = |X| - |B|$$

$$\text{יודעים } |X| = 6^{10}$$

כמו כן, יודעים כי $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_6$,

וכדי למצוא את $|B|$, משתמשים בעקרון ההכלה וההדחה:

$$|B_1| = |B_2| = \dots = 5^{10}$$

$$|B_1 \cap B_2| = \dots = 4^{10} \text{ וכו' } \dots$$

$$\text{בסוף מקבלים } |B| = 6 \cdot 5^{10} - \binom{6}{2} \cdot 4^{10} + \binom{6}{3} \cdot 3^{10} - \binom{6}{4} \cdot 2^{10} + \binom{6}{5} \cdot 1^{10} - 0$$

בסעיף ג': סופרים את מספר הפונקציות שהתמונה שלהם היא בגודל 5.

ראשית בוחרים 5 מספרים מתוך 6 שיהיו בתמונה, לכן יש $\binom{6}{5}$ אפשרויות.

ואז סופרים כמה פונקציות על יש מהקבוצה C אל קבוצה בגודל 5.

$$\text{יוצא } \binom{6}{5} \left[5^{10} - \binom{5}{1} \cdot 4^{10} + \binom{5}{2} \cdot 3^{10} - \binom{5}{3} \cdot 2^{10} + \binom{5}{4} \cdot 1^{10} \right]$$

שאלה 4: יהי $n \in \mathbb{N}$ כלשהו. תהי $A = \{1, 2, \dots, n\}$ $E = \{x \in P(A) \mid |x| \text{ זוגי}\}$ $O = P(A) \setminus E$ $|O| = |E|$ טענה:

הוכחה: נתבונן בביטוי $(1-1)^n$ השווה ל-0. נפתח את $(1-1)^n$ לפי נוסחת הבינום:

$$\begin{aligned} (1-1)^n &= ((-1)+1)^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k \\ &= \underbrace{\left(\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots \right)}_{\text{הארת עיניים לא חייבים לכתוב בהוכחה}} = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ זוגי}}} \binom{n}{k} (-1)^k + \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ אי זוגי}}} \binom{n}{k} (-1)^k \\ &= \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ זוגי}}} \binom{n}{k} - \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ אי זוגי}}} \binom{n}{k} \stackrel{\text{צריך מספר מילולי*}}{=} |E| - |O| \end{aligned}$$

* לכל $0 \leq k \leq n$ $\binom{n}{k}$ שווה למספר תתי-קבוצות בגודל k של A .

$$|E| = \sum_{\text{זוגי}} \binom{n}{k} \quad \text{לכן}$$

אבל זה שווה 0, ולכן $|E| = |O|$.

יחסים

הקדמה: מס מורכב מ-

1. קבוצה A שנקראת התחום
2. קבוצה B שנקראת הטווח
3. קבוצה $R \subseteq A \times B$, שנקראת הגרף, לעתים לקבוצה R קוראים היחס.

כאשר $(a, b) \in R$ מסמנים $a R b$
וכאשר $(a, b) \notin R$ מסמנים $a \not R b$

דוגמאות: $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{N}$, כאשר $A=B$, כלומר $R \subseteq A \times A$ אומרים ש- R הוא יחס על A .

1. $R = \emptyset$ למשל $x = y + \pi$
2. $R = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
3. $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x = y\}$ זהו יחס השוויון
4. $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid |x - y| \leq 1\}$

תכונות של יחסים יהי R יחס על A

1. רפלקסיביות: לכל $x \in A$, $(x, x) \in R$
2. אנטי-רפלקסיביות: לכל $x \in A$, $(x, x) \notin R$
3. סימטרי: לכל $x, y \in A$, אם xRy אז yRx
4. אסימטרי: לכל $x, y \in A$, אם xRy אז $y \not R x$
5. אנטי-סימטרי: לכל $x, y \in A$, אם xRy וגם yRx אז $x = y$
או באופן שקול: לכל $x, y \in A$, אם xRy וגם $x \neq y$ אז $y \not R x$
6. טרנזיטיבי: לכל $x, y, z \in A$, אם xRy וגם yRz אז xRz

תרגיל: הנה כמה יחסים, קבעו אלו מתכונות היחסים יש להם, ואלו אין להם.

1. יחס R על $\mathbb{N}$: $R = \{ (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \cdot y = 12 \}$
2. יחס R על $\mathbb{N}$: $R = \{ (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \sqrt{xy} \in \mathbb{N} \}$
3. $A = \{1, 2, \dots, 10\}$ יחס R על $P(A)$: $R = \{ (X, Y) \in P(A) \times P(A) \mid X \cap Y = \emptyset \}$

פתרון 1: יחס R על $\mathbb{N}$: $R = \{ (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \cdot y = 12 \}$

- א. רפלקסיבי? לא
נקח $x=5$, אז $x \cdot x = 25 \neq 12 \notin R$ ולכן $(x, x) \notin R$
- ב. אנטי-רפלקסיבי: כן
יהי $x \in \mathbb{N}$. נראה כי $x \not R x$ כלומר $x \cdot x \neq 12$
נניח בשלילה כי $x^2 = 12$ אזי $x = \pm\sqrt{12}$ אבל זהו אינו מספר טבעי - סתירה.
- ג. סימטרי: כן
יהי $x, y \in \mathbb{N}$. נוכיח שאם xRy אז yRx .
נניח xRy כלומר $x \cdot y = 12$, ולפי חילופיות הכפל $y \cdot x = 12$ ולכן yRy .
- ד. אנטי-סימטרי: לא
נקח $y=4, x=3$ אז xRy וגם yRx וגם $x \neq y$
- ה. טרנזיטיבי: לא
נקח $z=3, y=4, x=3$ אז xRy וגם yRz וגם $x \not R z$

פתרון 3: $R = \{(X, Y) \in P(A) \times P(A) \mid X \cap Y = \emptyset\}$ יחס R על $P(A)$ $A = \{1, 2, \dots, 10\}$

א. רפלקסיבי? לא

נקח $x = \{1\}$, אז $\{1\} \cap \{1\} = \{1\} \neq \emptyset$ ולכן $x \not R x$

ב. אנטי-רפלקסיבי: לא

נקח $x = \emptyset$ אז $x R x$

ג. סימטרי: כן

יהי $X, Y \in P(A)$ כלשהם. נראה שאם $x R y$ אז $y R x$.

נניח $x R y$ כלומר $X \cap Y = \emptyset$ לכן $Y \cap X = \emptyset$ (חילופיות החיתוך) ולכן $y R x$

ד. אנטי-סימטרי: לא

נקח $Y = \{2\}, X = \{1\}$ אז $X \cap Y = \emptyset$ וגם $Y \cap X = \emptyset$

לכן $x R y$ וגם $y R x$ וגם $x \neq y$

ה. טרנזיטיבי: לא

נקח $X = \{1\}$ $Y = \{2\}$ $Z = \{1, 3\}$

אז $x R y$ וגם $y R z$ וגם $x \not R z$

פתרון 2: יחס R על $\mathbb{N}$: $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \sqrt{xy} \in \mathbb{N}\}$

א. רפלקסיבי? כן

יהי $x \in \mathbb{N}$. נראה כי $x \in x$ כלומר $\sqrt{x \times x} \in \mathbb{N}$ ואכן $\sqrt{x \times x} = x \in \mathbb{N}$

לכן $(x, x) \in R$ כלומר $x R x$

ב. אנטי-רפלקסיבי: לא

נקח $x = 4$ אז $(x, x) \in R$ כי $\sqrt{x \times x} = 4 \in \mathbb{N}$

שיעור 11 - 01.01.09

(רב תודות לנעה בן-צבי)

תרגיל 10, שאלה 3:

תהי $A = \{1, \dots, 8\}$ והיו R, S יחסים על A .
נניח $R \subseteq S$ אזי כל זוג סדור ב- R הוא זוג סדור ב- S .
ניתן לומר כי R יחס מחמיר יותר מ- S , לדוגמה $\leq <$.

א. אם S רפלקסיבי אז R רפלקסיבי:

לא נכון. נקח $S = A \times A$ $R = \emptyset$.

ב. אם R רפלקסיבי אז S רפלקסיבי. נכון.

R רפלקסיבי ולכן $\forall x \in R \quad (x, x) \in R$

נראה כי S רפלקסיבי:

יהי $x \in A$, לפי ההנחה $(x, x) \in R$ ומכיוון ש- $R \subseteq S$ $(x, x) \in S$
מכאן שלכל $x \in A$, $(x, x) \in S$ ולכן S רפלקסיבי.

ג. אם S טרנזיטיבי אז R טרנזיטיבי.

לא נכון. נקח $S = A \times A$ ו- $R = \{(1, 2), (2, 3)\}$

R מוכל ב- S אך לא טרנזיטיבי מכיוון ש- $(1, 3)$ לא ביחס.

ד. אם R טרנזיטיבי אז S טרנזיטיבי.

לא נכון. נקח $R = \emptyset$ $S = \{(1, 2), (2, 3)\}$

יחס שקילות

יחס שקילות הוא יחס רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

חלוקה של קבוצה A לחלקות שקולות. זו רשימה של קבוצות $A_1, A_2, \dots, A_n$
כך שלכל $1 \leq i, j \leq n$ אם $i \neq j$ אזי $A_i \cap A_j = \emptyset$ (חלוקה לקבוצות זרות).
ומתקיים $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A$

קיימת התאמה חח"ע ועל בין יחס שקילות על A לבין חלוקות של A .
 בהינתן חלוקה $A_1 \dots A_n$ נתאים לה יחס שקילות $X \sim Y$ אם"ם קיים i כך ש- $x, y \in A_i$.
 בהינתן יחס שקילות, מתאים לו את החלוקה של A למחלקות שקילות

תזכורת: אם $\sim$ יחס שקילות על A , יהי $x \in A$
 מגדירים את מחלקת השקילות $[x] = \{y \in A \mid y \sim x\}$
 אם $x \sim y$ אז $[x] = [y]$.
 האיבר ה- x נקרא הנציג של מחלקת השקילות של $[x]$

תרגיל: מצאו את מחלקות השקילות של היחסים הבאים: $A = \{1, 2, 3, 4\}$

1. יחס R על $P(A)$: $R = \{(x, y) \in P(A) \times P(A) \mid |x| = |y|\}$
2. יחס S על $A \times A$ מוגדר לכל $(x, y), (w, z) \in A \times A$
 אם"ם $x - w = y - z$

פתרון:

1. יחס R על $P(A)$: $R = \{(x, y) \in P(A) \times P(A) \mid |x| = |y|\}$

נקח איבר מסויים ונקבל את השקילות לו נמשיך הלאה עם האיברים הנותרים:

$$\begin{aligned} [\emptyset]_R &= \{Y \in P(A) \mid |\emptyset| = |Y|\} = \{\emptyset\} \\ [\{1\}]_R &= \{Y \in P(A) \mid |1| = |Y|\} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\} \\ [\{1, 2\}]_R &= \{Y \in P(A) \mid |2| = |Y|\} \\ [\{1, 2, 3\}]_R &= \{Y \in P(A) \mid |3| = |Y|\} \\ [\{1, 2, 3, 4\}]_R &= \{Y \in P(A) \mid |4| = |Y|\} \end{aligned}$$

ישנן 5 מחלקות שקילות ליחס R על $P(A)$.

2. יחס S על $A \times A$ מוגדר לכל $(x, y), (w, z) \in A \times A$
 אם"ם $x - w = y - z$

עדיף לושכתב את היחס באופן הבא: $(x, y) S (w, z)$ אם"ם $x - y = w - z$

$$\begin{aligned} [(1, 2)]_R &= \{(x, y) \in A \times A \mid x - y = 1 - 2\} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\} \\ [(1, 3)]_R &= \{(x, y) \in A \times A \mid x - y = 1 - 3\} = \{(1, 3), (2, 4)\} \end{aligned}$$

תרגיל:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ תהי}$$

כמה יחסי שקילות יש על A?

כמה מתוכם מכילים את היחס הבא $S = \{(1,1) \dots (5,5), (1,2), (2,1), (3,4), (4,3)\}$ וכמה מתוכם מוכלים בו?

פתרון:

איזו חלוקה משרה היחס S (חלוקה למחלקות שקילות)?

$$[1]_S = \{x \in A \mid xSI\}$$

הסבר:

$$[1]_S = \{1, 2\} \quad [3]_S = \{3, 4\} \quad [5]_S = \{5\}$$

כך כותבים את החלוקה שהיחס משרה.

$$\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5\}$$

אם יחס שקילות R מכיל את S אזי לכל $x \in A$ $[x]_S \subseteq [x]_R$

הוכחה:

יהי $y \in [x]_S$ אזי $(y, x) \in S$ ולכן $(y, y) \in R$ ולכן $y \in [x]_R$

מכאן היחס R ישנה חלוקה גסה יותר.

כלומר, מחלקת שקילות ביחס ל-R היא איחוד מחלקות שקילות ביחס ל-S.

נכתוב את כל החלוקות הללו:

$$\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5\}$$

$$\{1, 2, 5\}, \{3, 4\}$$

$$\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}$$

$$\{1, 2, 3, 4\}, \{5\}$$

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}$$

ישנו התאמה חח"ע ועל בין חלוקות לבין יחסי שקילות.

מספר יחסי השקילות שמכילים את S = מספר החלוקות הגסות יותר.

כלומר ישנם 5 כאלו.

לדוגמה: יחס השקילות המתאים ל-2:

$$\{(1,1), (2,2), (5,5), (1,2), (2,1), (5,1), (1,5), (2,5), (5,2), (3,3), (4,4), (3,4), (4,3)\}$$

כמה יחסי שקילות מוכלים ב-5?

כמספר החלקות העדינות יותר מ-5 חלוקות שהן כל קבוצה חלוקה מוכלת באחת ממחלקות השקילות של 5:

$$\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5\}$$

$$\{1\}, \{2\}, \{3, 4\}, \{5\}$$

$$\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$$

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$$

שיעור 12 - 08.01.10

(רב תודות לנעה בן-צבי)

תרגיל 11 - שאלה 3:

תהי A, B פונקציה מלאה. $f: A \rightarrow B$
נגדיר יחס $R_f = \{ (x, y) \in A \times A \mid f(x) = f(y) \}$

ב. טענה: f חח"ע אם"ם מחלקות השקילות של R_f הן סינגלטונים.

הוכחה - כיוון אחד:

נניח כי f חח"ע, נראה שכל מחלקות השקילות הן סינגלטונים.

תהי $E \subseteq A$ מחלקת שקילות כלשהי.

E אינה ריקה. נקח $x \in E$

נוכיח כי $E = \{x\}$. נראה כי לכל $y \in E$ מתקיים $x = y$.

יהי $y \in E$ אזי $(x, y) \in R_f$ מהגדרת מחלקת שקילות.

ולכן $f(x) = f(y)$ מכיוון ש- f חח"ע נובע כי $x = y$.

בעצם R_f הוא יחס השוויון.

כיוון שני:

נניח כי מחלקות שקילות הן סינגלטונים. נוכיח כי f חח"ע.

יהיו $x, y \in A$. נניח כי $f(x) = f(y)$ ונראה כי $x = y$.

$f(x) = f(y)$ ולכן $(x, y) \in R_f$

לכן הקבוצה $\{x, y\}$ מוכלת באיזשהו מחלקת שקילות.

לפי ההנחה קבוצות השקילות הן סינגלטונים

לכן $\{x, y\}$ גם הוא סינגלטון ולכן $x = y$.

ג. נקח $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \mathbb{N}$ $f: A \rightarrow B$ $f((x, y)) = x + y$

מצאו את מחלקות השקילות של R_f

$$[(1, 3)]_{R_f} = \{ t \in A \mid (t, (1, 3)) \in R_f \} = \{ t \in A \mid f(t) = f(1, 3) = 4 \} = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$$

$$[(2, 3)]_{R_f} = \{(2, 3), (3, 2)\} \quad [(1, 1)]_{R_f} = \{(1, 1)\}$$

$$[(3, 3)]_{R_f} = \{(3, 3)\} \quad [(1, 2)]_{R_f} = \{(1, 2), (2, 1)\}$$

ד. (בונוס) יהי S יחס שקילות על A .

הוכיחו כי קיימת קבוצה B , וקיימת פונקציה מלאה $f: A \rightarrow B$ כך ש- $S = R_f$.
 דוגמה: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ יחס שקילות שמחלקותיו $\{1, 2, 3\}, \{4, 6\}, \{5\}$

נקח $B = \{1, 2, 3\}$ ונגדיר $f(1) = f(2) = f(3) = 1$ $f(4) = f(6) = 2$ $f(5) = 3$
 ואז $S = R_f$

לחלופין ניתן להתאים בין איברי מחלקות השקילות לבין מחלקה עצמה.
 $B = P(A)$ $f(1) = f(2) = f(3) = \{1, 2, 3\}$ $f(4) = f(6) = \{4, 6\}$ $f(5) = \{5\}$

הוכחה: נגדיר $B = P(A)$ $f(x) = [x]_S$

נבדוק כי אכן $R_f = S$ ונראה כי $S \subseteq R_f$

יהיו $x, y \in A$ ונניח $(x, y) \in S$.

אז $f(x) = [x]_S$, $f(y) = [y]_S$

אבל xSy ולכן $[x]_S = [y]_S$

ולכן $f(x) = f(y)$ ומכאן $(x, y) \in R_f$.

נראה כי $R_f \subseteq S$. יהיו $x, y \in A$ ונניח $(x, y) \in R_f$.

אז $f(x) = f(y)$ כלומר $[x]_S = [y]_S$ וזה אומר xSy כלומר $(x, y) \in S$

הסגור הטרנזיטיבי

תהי $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $R = \{(1, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (2, 3), (5, 1)\}$ אינו טרנזיטיבי.

נגדיר $R_1 = R \cup \{(1, 4), (3, 5), (4, 6), (2, 4), (5, 3), (4, 1)\}$ וגם R_1 אינו טרנזיטיבי.

$R_2 = R_1 \cup \{(1, 5), (3, 6), (3, 1), (4, 3), (2, 5), (5, 4), (1, 6), (1, 1), (4, 4), (2, 1), (5, 5), (3, 3)\}$ גם לא טרנז

נגדיר R_3 וכו'...

נגיע בסוף לקבוצה R_i כך שלא נזדקק להוסיף זוגות נוספים. כלומר יהיה טרנזיטיבי.

נניח כי S יחס טרנזיטיבי על A ו- $R \subseteq S$, אז $R_1 \subseteq S$ ואז $R_2 \subseteq S$ וכו'... כלומר $R_i \subseteq S$.

במילים אחרות, R_i הוא החס הטרנזיטיבי הקטן ביותר המכיל את R .

הגדרה: אם R יחס על A ,

הסגור הטרנזיטיבי הוא היחס הטרנזיטיבי הקטן ביותר המכיל את R .

הסגור הטרנזיטיבי של R הוא $R^* = \cap T$

T יחס טרנזיטיבי על A כך ש- $R \subseteq T$.

תרגיל:

תהי $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

מצאו את כל יחסי הסדר מלא על A המכילים את היחס

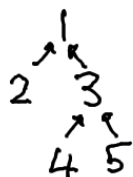
$$R = \{(2,1), (3,1), (5,3), (4,3)\}$$

פתרון:

יהי T יחס סדר מלא המכיל את R .

T טרנזיטיבי ולכן $R^* \subseteq T$ כאשר $R^* = R \cup \{(4,1), (5,1)\}$

דיאגרמת הסה של R^* :



ל- T יש איבר מינימום והוא יהיה 2, 4 או 5

(אלו האיברים המינימלים של R^*)

נחלק למקרים:

2 המינימום של T .

T יכול יחס סדר חלקי שהדיאגרמה שלו:

T יחס סדר מלא ולכן יש שתי אפשרויות:



(1) $4T5$ נקבל כי $2T4T5T3T1$

(2) $5T4$ נקבל כי $2T5T4T3T1$

שיעור 13 - 15.01.10

שידוכים

תרגיל: יש 4 אנשים A,B,C,D ויש להם העדפות (כתובות משמאל לימין):

$D:ABC \quad C:DAB \quad B:CDA \quad A:BCD$

מצא אילו שידוכים לזוגות יציבים ואלו אינם.

פתרון:

A-B, C-D: לא יציב.

B,D זוג סורר כי B מעדיף את D על פני A שקיבל.

D מעדיף את B על פני C שקיבל.

B-C, A-D: לא יציב.

A,C זוג סורר.

A-C, B-D: שידוך יציב.

A,B אינו זוג סורר כי B מעדיף את מה שקיבל על פני A.

A,D אינו זוג סורר כי A מעדיף את מה שקיבל על פני D.

C,D אינו סורר...

B,D אינו סורר...

תרגיל:

נמצא שידוך יציב לאותיות ABCD עם המספרים 1234 שהעדפותיהם נתונות:

$A:1234 \quad B:2134 \quad 1:ABCD \quad 2:DCBA$

$C:1432 \quad D:4312 \quad 3:ABCD \quad 4:CDAB$

באמצעות האלגוריתם של Gale-Sharpley בתיבור אותיות.

פתרון:

שלבי האלרואיתם הם:

שלב א':

1	2	3	4
← A	B		D

שלב ב':

1	2	3	4
A	B		D ←

שלב ג':

1	2	3	4
A	B	C	D

תהי $A = \{1, 2, \dots, 10\}$

כמה יחסים יש על A?

$$|P(A \times A)| = 2^{|A \times A|} = 2^{10 \cdot 10} = 2^{100} = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k}$$

כמה מתוכם אנטי-רפלקסיביים?

$$E = \{(x, x) \mid x \in A\}$$

יחס אנטי רפלקסיבי הוא יחס שמוכל ב- $(A \times A) \setminus E$

$$|P(A \times A \setminus E)| = 2^{|A \times A \setminus E|} = 2^{|(A \times A)| - |E|} = 2^{100 - 10}$$

$$\uparrow A \times A \supseteq E$$

כמה מתוכם רפלקסיביים?

נסמן ב-A את קבוצות היחסים האנטי רפלקסיביים

וב-R את קבוצות היחסים הרפלקסיביים.

$$g(x) = X \setminus E, \quad g: R \rightarrow A \quad f(x) = X \cup E, \quad f: A \rightarrow R$$

בדקו - f, g הופכיות זו של זו. לכן f חח"ע ועל. ולכן $|R| = |A| = 2^{100-10}$

כמה מתוכם סימטריים?

"נבנה" יחס סימטרי. לכל $x \in A$ צריך לבחור האם (x, x) שייך ליחס או לא.

לכל $\{x, y\} \subseteq A$ כך ש- $x \neq y$ צריך לבחור

האם $(x, y), (y, x)$ שניהם שייכים ליחס, או ששניהם לא.

כל הבחירות האלה הם בלתי תלויות זו בזו.

לכן לפי כלל המכפלה יש יחסים סימטריים.

כמה אנטי סימטריים יש?

לכל $x \in A$ מלחיטים אם (x, x) שייך ליחס או לא.

ולכל קבוצה $\{x, y\} \subseteq A$ כאשר $x \neq y$ מחליטים אם:

א) (x, y) שייך ליחס ו- (y, x) לא

ב) (y, x) שייך ליחס ו- (x, y) לא

ג) (x, y) ו- (y, x) שניהם לא שייכים ליחס.

לכן מס' היחסים האנטי סימטריים הנו $2^{10} \cdot 3^{\binom{10}{2}}$

תרגיל: חשבו $\sum_{k=0}^{49} \binom{99}{k}$

פתרון: נזכור ש- $\sum_{k=0}^{99} \binom{99}{k} = \sum_{k=0}^{99} \binom{99}{k} \cdot 1^k \cdot 1^{99-k} = (1+1)^{99} = 2^{99}$
 יודעים ש- $\binom{99}{k} = \binom{99}{99-k}$ לכן $\sum_{k=0}^{49} \binom{99}{k} = \sum_{k=0}^{49} \binom{99}{99-k} = \sum_{l=50}^{99} \binom{99}{l}$
 לכן: $2 \cdot \sum_{k=0}^{49} \binom{99}{k} = \sum_{k=0}^{49} \binom{99}{k} + \sum_{l=50}^{99} \binom{99}{l} = \sum_{k=0}^{99} \binom{99}{k} = 2^{99}$
 ולכן $\sum_{k=0}^{49} \binom{99}{k} = \frac{2^{99}}{2} = 2^{98}$

תרגיל: מצאו לזה: $3^n = (1+2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot 2^k$ משמעות קומבינטורית.

פתרון: $3^n =$ מס' האפשרויות לשים n ילדים בתוך 3 סלים (סל ירוק, כחול ואדום).
 בכמה אפשרויות יש בדיוק k ילדים בסל הירוק $(0 \leq k \leq n)$?
 יש $\binom{n}{k}$ אפשרויות לבחור אילו ילדים יהיו בסל הירוק.
 את יתר ה-k-n ילדים יש 2^{n-k} דרכים לפזר בין הסל הכחול והאדום.
 בסה"כ יש $\binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}$ דרכים לחלק כך שיהיו בדיוק k בירוק.
 לכן יש $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k}$ אפשרויות פינור בסה"כ.

למה זה בסדר? $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} 2^{n-k} = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} 2^l$
 $(\binom{n}{n} 2^n + \binom{n}{n-1} 2^{n-1} + \dots + \binom{n}{0} 2^0)$

תרגיל: תהי $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ נגדיר $f: P(A) \rightarrow A \cup \{0\}$ $f(x) = |X \Delta \{1, 3\}|$, מצאו הפכיות מימין ומשאל אם יש.

פתרון: הסבר: $f(\{1, 2\}) = |\{1, 2\} \Delta \{1, 3\}| = |\{2, 3\}| = 2$

f אינה חח"ע.

נראה שקיימים $x, y \in P(A)$ כך ש- $x \neq y$ וגם $f(x) = f(y)$.

נקח $x = \{1\}$, $y = \{3\}$

ואז $x \neq y$ ו- $f(x) = |\{1\} \Delta \{1, 3\}| = |\{3\}| = 1$

$f(y) = |\{3\} \Delta \{1, 3\}| = |\{1\}| = 1$

(הוכחה אחרת: שימוש בשבך היונים)

אין ל- f הפכית שמאלית כי אינה חח"ע.

נראה שקיימת הפכית ימינית.

כלומר נראה שיש פונקציה $g: A \cup \{0\} \rightarrow P(A)$, $f \circ g = i_{A \cup \{0\}}$

רוצים ש- $f(g(0)) = |g(0) \Delta \{1, 3\}| = 0$

נגדיר $g(0) = \{1, 3\}$

$g(1) = \{1\}$

$g(2) = \{2, 1\}$

$g(3) = \{1, 2, 4\}$

$g(4) = \{1, 2, 4, 5\}$

$g(5) = \{2, 4, 5\}$

בדקו - לכל $x \in A \cup \{0\}$, $f \circ g(x) = x$.