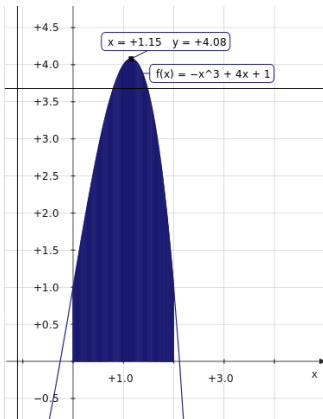


מתמטיקה בדידה

אני בעיקר משתמש בשקופיות
לכן הקובץ הזה מורכב בעיקר מההוכחות הארוכות שיש על הלוח

שיעור 1 - 19.10.09

הוכחה (1)



| צורה אחד לבדוק:

$$\underbrace{-x^3 + 4x + 1 > 0}_Q \quad \text{אז} \quad \underbrace{0 \leq x \leq 2}_P$$

הוכחה

נניח ש- $0 \leq x \leq 2$

ראשית נכתוב

$$\begin{aligned} -x^3 + 4x &= x(4 - x^2) \\ &= x(2 - x)(2 + x) \end{aligned}$$

כאשר השוויון השני נובע מהעובדה ש-

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \quad \text{לכל } a, b$$

מכיוון ש- $0 \leq x \leq 2$,

אזי מתקיים ש- $x, 2-x, 2+x$ כלום $0 \leq$, ולכן גם המכפלה שלהם.

אם נחבר 1 נקבל מספר $0 <$

$$\text{ולכן } -x^3 + 4x + 1 = x(2-x)(2+x) \geq 0$$

מ.ש.ל. Q.E.D. ■

הוכחה (2)

טענה: אם r הוא מספר לא רציונאלי, אז $\sqrt{r}$ גם לא רציונאלי.

הוכחה: נוכיח את ה-contrapositive.

נניח ש- $\sqrt{r}$ רציונאלי $\underbrace{\text{ונוכיח ש-}}_{\text{רציונאלי}} r$.

נניח ש- $\sqrt{r}$ הוא רציונאלי, כלומר אפשר לכתוב $\sqrt{r} = \frac{a}{b}$ עבור $a, b \in \mathbb{Z}$.

$$r = \frac{a^2}{b^2} \quad \text{נעלה את שני האגפים בריבוע נקבל}$$

מכיוון ש- a^2, b^2 שניהם שלבים, אזי r הוא רציונאלי.

■

שיעור 2 - 26.10.09

טענה: $\sqrt{2}$ הוא לא מספר רציונלי.

הוכחה: בדרך השלילה.

נניח ש- $\sqrt{2}$ רציונלי.

כלומר אפשר לכתוב $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ כאשר $a, b \in \mathbb{Z}$

וגם ל- a, b אין גורם משותף (השבר "מצומצם")

טענה (למה): a, b שניהם זוגיים.

$$(Q \wedge \neg Q \equiv F)$$

אם נוכל לזהות את זה אז...

הוכחה: יהיו $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ אז $\frac{a^2}{b^2} = 2$ כלומר $a^2 = 2b^2$.

לכן a זוגי (מטענה קודמת).

מכיוון ש- a זוגי, נוכל לכתוב $a = 2c$ עבור $c \in \mathbb{Z}$.

אז $a^2 = 4c^2$ ולכן $2b^2 = 4c^2$ (מטענה קודמת).

מכאן נובע ש- $b^2 = 2c^2$ ולכן b זוגי.

הוכחנו ש- a, b זוגיים.

אבל הנחנו שלא נוכל לצמצם a, b וזאת סתירה.

מכאן נובע ש- $\sqrt{2}$ לא רציונלי.

■

שיעור 3 - 02.11.09

הוכחת כמתים בקבוצות II



$$\begin{aligned}
 & \neg(A \subseteq B) \\
 &= \neg(\forall x, x \in A \rightarrow x \in B) \\
 &= \exists x, \neg(\overbrace{(x \in A \rightarrow x \in B)}^{(\neg P) \vee Q}) \\
 &= \exists x, \neg(\underbrace{x \in A}_P \rightarrow \underbrace{x \in B}_Q(x)) \\
 &= \exists x, \neg(x \notin A \text{ OR } x \notin B) \\
 &= \exists x, x \in A \text{ AND } x \in B \text{ (De Morgan)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \neg(A = B) \\
 &= \neg(A \subseteq B \text{ and } B \subseteq A)
 \end{aligned}$$

$$P(n) = [(n \in \text{primes}) \text{ and } (\exists k \in \mathbb{Z}, n = 4k + 1)]$$

קבוצת החזקה

$$P(A) = \{S \mid S \subseteq A\}$$

$$P(S) = \forall x, x \in S \rightarrow x \in A$$

$$\begin{array}{lcl}
 \emptyset \text{ מוכלת בכל קבוצה} & \longrightarrow & |E|=3 \quad E=\{1, 2, 17\} \\
 \emptyset \text{ במקרה זה שייך לקבוצה הזאת} & \longrightarrow & |E|=4 \quad E=\{1, 2, 17, \emptyset\}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 A &= \{1, 2, 3\} \\
 A \cup \{\emptyset\} &= \{1, 2, 3, \emptyset\}
 \end{aligned}$$

$$A \setminus B = A \cap \bar{B}$$

For all x,y,z :

1. If $X \cup Y = X$ then $Y \subseteq X$
2. If $X \subset Y$ and $Z \subseteq Y$ then $X \subset Z$
3. $P(X \cap Y) = P(X) \cap P(Y)$

טענה 1: לכל x,y אם $\overbrace{X \cup Y = X}^P$ אז $\overbrace{Y \subseteq X}^Q$.



הוכחה: יהיו X, Y קבוצות כלשהן.

נניח ש- $X \cup Y = X$.

נרצה להראות ש- $Y \subseteq X$.

כלומר שלכל $\underbrace{y \in Y}$ מתקיים ש- $\underbrace{y \in X}$

יהיו $y \in Y$, בפרט $y \in X \cup Y$ (מהגדרת פעולת האיחוד)

ולכן מההנחה שלנו ($X \cup Y = X$) נובע ש- $y \in X$

טענה 2: לכל X, Y, Z אם $X \subset Y$ וגם $Z \subseteq Y$ אז $X \subset Z$.

לא נכון. דוגמה נגדית:

נראה ש $\underline{\text{קיים}}$ X, Y, Z כך ש- $X \subset Y$ וגם $Z \subseteq Y$ אבל $X \not\subset Z$.

$$X = \{1\} \quad Y = \{1, 2\} \quad Z = \{2\}$$

1. $X \subset Y$ ✓ כל איבר ב- X הוא גם איבר ב- Y
וגם קיים איבר ב- Y שאינו איבר ב- X (שהוא 2).

2. $Z \subseteq Y$ ✓

3. $X \subset Z$ ✗ קיים איבר ב- X שאינו שייך ל- Z (שהוא 1).

טענה 3: לכל X, Y $P(X \cap Y) = P(X) \cap P(Y)$

הוכחה: (הכלה דו-כיוונית)

$$P(X \cap Y) \subseteq P(X) \cap P(Y)$$

תהי $S \subseteq X \cap Y$ אז $S \subseteq P(X \cap Y)$

ולכן לכל $s \in S$ מתיים $s \in X$ וגם $s \in Y$.

בפרט, לכל s , אם $s \in S$ אז $s \in X$ וגם אם $s \in S$ אז $s \in Y$.
 $\underbrace{S \subseteq X \rightarrow S \subseteq P(X)}_{S \subseteq Y \rightarrow S \subseteq P(Y)}$

ולכן $S \subseteq P(X)$ וגם $S \subseteq P(Y)$

מסקנה: $\checkmark S \subseteq P(X) \cap P(Y)$

$$P(X) \cap P(Y) \subseteq P(X \cap Y)$$

תהי $S \subseteq P(X) \cap P(Y)$ אזי $S \subseteq P(X)$ וגם $S \subseteq P(Y)$

כלומר $S \subseteq X$ וגם $S \subseteq Y$.

מכאן, לכל (אם $s \in S$ אז $S \subseteq X$) וגם (אם $s \in S$ אז $s \in Y$).

לכן לכל s , אם $s \in S$ אז $(s \in Y \text{ וגם } s \in X)$

במילים אחרות, לכל $s \in S$ מתקיים $s \in X \cap Y$

לכן $S \subseteq X \cap Y$

מסקנה: $S \subseteq P(X \cap Y)$

■

$$\frac{A \rightarrow B \cap C}{(A \rightarrow B) \cap (A \rightarrow C)}$$

נאות. השתמשנו בו למעלה. איפה?

$$\begin{aligned} (X \setminus Y) \setminus Z &= X \setminus (Y \cup Z) \\ &= (X \cap \bar{Y}) \cap \bar{Z} \quad (\text{הגדרה של } A/B) \\ &= X \cap (\bar{Y} \cap \bar{Z}) \quad (\text{אסוציאטיביות}) \\ &= X \cap (\overline{Y \cap Z}) \quad (1. \text{ de morgan, } 2. \bar{\bar{x}} = x) \\ &= X \setminus (Y \cap Z) \quad (\text{הגדרה של } A/B) \end{aligned}$$

שיעור 4 - 09.11.09

טענה: הפונקציה $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ המוגדרת על ידי $f(x) = 2x$ הוא חח"ע.

הוכחה:

יהיו $x, x' \in \mathbb{N}$

נניח ש- $x \neq x'$

אז $f(x) = 2x \neq 2x' = f(x')$

כאשר (*) נובע מכך ש- $x \neq x'$ ולכן $f(x) \neq f(x')$

■

שיעור 5 - 16.11.09

טענה: לכל שלוש הפונקציות $f: C \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$, $h: A \rightarrow B$ מתקיים $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

קודם נברר את תחומי ההגדרה:

$$\begin{aligned} f \circ (g \circ h) &: A \rightarrow D \\ (f \circ g) \circ h &: A \rightarrow D \end{aligned}$$

הוכחה: צריך להראות שלכל $x \in A$ מתקיים $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

יהיו $x \in A$ אזי

$$\begin{aligned} f \circ (g \circ h)(x) &= f \circ (g(h(x))) && \text{הגדרת } g \circ h \\ &= f(g(h(x))) && \text{הרכבת } f \text{ עם פונקציה} \\ &= (f \circ g)(h(x)) && \text{הרכבת } f \text{ של } g \\ &= (f \circ g) \circ h(x) && \text{הרכבה...} \end{aligned}$$

■

תזכורת: $\forall x, x' \in A, f(x) = f(x') \rightarrow x = x'$ חח"ע
על: $\forall y \in B, \exists a \in A, f(a) = y$

טענה: לפונקציה $f: A \rightarrow B$ יש הופכית שמאלה $\overbrace{P}$ אם"ם $\overbrace{Q \Leftrightarrow P}$ היא $\overbrace{Q}$ חח"ע

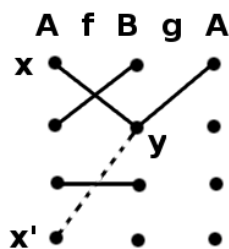
הוכחה: ($\Leftarrow$) נניח של- f יש הופכית שמאלית. נראה שהיא חח"ע.

יהיו $x, x' \in A$ כך ש- $f(x) = f(x')$
 מכיוון של- f יש הופכית שמאלית אזי קיימת $g: B \rightarrow A$ כך ש- $g \circ f = i_A$.
 לכן
$$x \underset{g \circ f = i_A}{=} g(f(x)) \underset{f(x) = f(x')}{=} g(f(x')) \underset{g \circ f = i_A}{=} x'$$

 מכאן $x = x'$ ולכן f חח"ע.

($\Rightarrow$) נניח ש- f חח"ע. נראה של- f יש הופכית שמאלית.

יהי $y \in \text{Im}(f) \subseteq B$
 נגדיר $g(y)$ להיות x כלשהו שמקיים $f(x) = y$ (y מה-image של f)
 נרצה להראות $g(f(x)) = x$, $\forall x \in A$.



נמשיך עם עדו.
 אבל, קיצור, נרצה להוכיח
 כי $g(x)$ מוגדר כי f היא חח"ע.

$$\forall y \in B, \forall x, x' \in A, g(y) = x \wedge (g(y) = x') \rightarrow x = x'$$

טענה: לפונקציה $f: A \rightarrow B$ יש הופכית ימנית $\overbrace{Q \Leftrightarrow P}^P$ אם היא $\underbrace{Q}_{\text{על}}$

הוכחה: ($\Leftarrow$) נניח של- f יש הופכית ימנית. $g: B \rightarrow A$

ויהי $y \in B$

ניקח $x = g(y)$ ונקבל $f(x) = f(g(y)) = y$

ולכן f היא על.

($\forall y \in B, \exists x \in A, f(x) = y$)

($\Rightarrow$) נניח ש- f היא על ונראה שיש לה הופכית ימנית.

יהיו $y \in B$

נגדיר את $g(y)$ להיות ה- $x \in A$ "הקטן ביותר" כך ש- $f(x) = y$

(א כזה תמיד קיים בגלל ש- f היא על).

פ היא אכן פונקציה כי לכל $y \in B$ מוגדר $x \in A$ יחיד כך ש- $g(x) = y$.

עתה לכל $y \in B$, $f(g(y)) = f(x) = y$.

לכן f הופכית ימנית.