

מתמטיקה אינפיוניטסימלי א'

מההרצאות של מר' ישראל פרידמן
מרכז הבינתחומי הרצליה
סמסטר א', שנה א', 2009

תאריך עדכון אחרון של קובץ זה הוא

שלישי, 26 ינואר, 2010

עדכונים וכתב הויתור (שווה לקרוא) נמצאים באתר

<http://idc.gadi.cc/compsci/>

הסיכומים הוכנו ע"י גדי כהן
סטודנט לתואר מדעי המחשב

תוכן העניינים

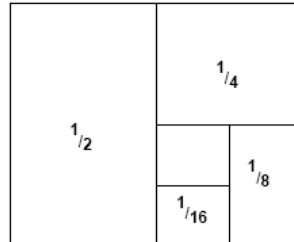
85.....	שיעור 9-ב (17.12.09)	1.....	שיעור 1-א (20.10.09)
85.....	משיק ונגזרת	6.....	שיעור 1-ב (22.10.09)
90.....	שיעור 10-א (22.09.12)	6.....	שורשים
92.....	כללי גזירה	8.....	תכונות הערך המוחלט
93.....	נוסחאות לגזירה	9.....	קטעים על הישר הממשי
94.....	שיעור 10-ב (24.09.12)	11.....	שיעור 2-א (27.10.09)
גזרות של פונקציות מורכבות (כלל			צפיפות המספרים הרציונלים בישר
97.....	השרשרת - (Chain Rule)	11.....	הממשי
100.....	שיעור השלמה (27.12.09)	13.....	המישור
100.....	שימושים של כלל השרשרת	16.....	שיעור 2-ב (29.10.09)
נגזרות של פונקציות הפיכות		16.....	פונקציות
103.....		21.....	שיעור 3-א (03.11.09)
104.....	שיעור 11-א (29.12.09)	25.....	שיעור 3-ב (05.11.09)
104.....	פונקציות טריגונומטריות הפיכות	26.....	פונקציות טריגונומטריות
נקודות קיצון מקומי של פונקציה		32.....	שיעור 4-א (10.11.09)
106.....		32.....	פעולות עם פונקציות
107.....	משפט פרמה ((Fermat's Theorem	34.....	גבול של פונקציות בנקודה
108.....	שיעור 11-ב (31.12.09)	37.....	שיעור 4-ב (12.11.09)
108.....	קיצון מוחלט	41.....	שיעור 5-א (17.11.09)
משפטי ויירשטראס (Extreme Value		41.....	גבולות וערכים מוחלטים
109.....	Theorem)	45.....	כללי חשבון לגבולות
השיטה למציאת קיצון מוחלט לפונקציה		47.....	שיעור 5-ב (19.11.09)
רציפה בקטע סגור		48.....	גבולות חד צדדים
110.....		50.....	משפט הסנדוויץ' ((Squeeze Theorem
111.....	משפט רול ((Rolle's Theorem	52.....	שיעור 6-א (24.11.09)
112.....	משפט הערך הממוצע של לגרנד'	52.....	גבולות של פונקציות טריגונומטריות
113.....	שיעור 12-א (05.01.10)	56.....	שיעור 6-ב (26.11.09)
113.....	הכללה של קושי למשפט לגרנד')	56.....	רציפות
115.....	Cauchy's Mean Value Theorem)	59.....	רציפות של פונקציה בקטע
כלל לופיטל (L'Hôpital's rule) - המקרה		61.....	שיעור 7-א (1.12.09)
116.....	"	62.....	גבולות אינסופיים
118.....	שיעור 12-ב (07.01.10)	66.....	שיעור 7-ב (3.12.09)
118.....	תחומי עליה וירידה של פונקציה גזירה	66.....	גבולות ב- ∞ וב- $-\infty$
119.....		71.....	שיעור 8-א (08.12.09)
122.....	שיעור 13-א (12.01.09)	Exponential)	פונקציות מעריכיות (Exponential
122.....	קמירות וקערות של פונקציות	71.....	Functions)
אסימפטוטות		74.....	חוקי חזקות ושורשים
124.....		75.....	המספר e
126.....	שיעור 13-ב (14.01.09)	76.....	שיעור 8-ב (10.12.09)
126.....	מבחן הנגזרת השנייה לקיום נקודות קיצון	76.....	פונקציות לוגריתמיות
126.....		81.....	שיעור 9-א (15.12.09)
131.....	אינדקס	83.....	משפט ערך הביניים לפונקציות רציפות

שיעור 1-א (20.10.09)

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

(1) קבוצת המספרים הטבעיים

קבוצת כל המספרים השלמים החיוביים
(כל המספרים המתקבלים בחיבור 1 עם עצמו מספר סופי של פעמים).



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots$$

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$$

(2) קבוצת המספרים השלמים

כל השלמים החיוביים, שליליים, או 0.
(הם מתקבלים ע"י חיבור של 1 ו-1- מספר סופי של פעמים).

$$0.123 = \frac{123}{1000}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \text{ שלמים}, m \neq 0 \right\}$$

(3) קבוצת המספרים הרציונלים

אלה כל המספרים שהם מנות של שלמים.

למה לא מחלקים ב-0? $\frac{1}{0}$

$$\frac{1}{0} = 0 \quad \text{בניח ש-}$$

$$1 = 0x \quad \text{אז}$$

$$1 = 0 \quad \text{ואז}$$

סתירה

לכן ההנחה ש- $\frac{1}{0}$ הוא מספר לא נכונה ולכן $\frac{1}{0}$ לא מספר.

מה לגבי $\frac{0}{0}$?

נניח ש- $\frac{0}{0} = x$ אז $0 = 0x$

$$0 = 0$$

אבל אם נניח שקיים מספר כמו $\frac{0}{0}$ אז $\frac{0}{0} = 1$ ו- $0 = 1 \cdot 0$

אז $\frac{0}{0} = 2$ ו- $0 = 2 \cdot 0$

$$1 = 2 \quad \text{ולכן}$$

זה שהגענו לתשובה נכונה לא אומר משהו על ההנחה עצמית.

הערות חשובות על הנחות

(1) אם מתוך הנחה α ניתן להגיע לטענה β שהוא שגויה, אז α לא נכונה.

(2) אם מתוך הנחה α מגיעים לטענה β שהוא נכונה, הדבר לא מצביע על נכונות של α או אי-נכונות של α .

דוגמאות:

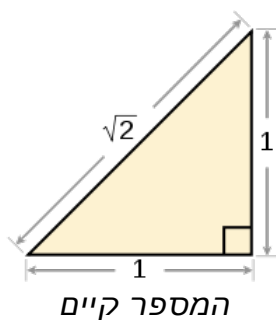
(1) נניח ש- $1=1$ כפל ב-0. נכון. $0=0$

(2) נניח ש- $1=-1$ כפל ב-0. נכון. $0=0$

(3) נניח ש- $1=-1$ נעלה בריבוע נכון. $1=1$

לכם אם מגיעים למסקנה שהוא נכונה, לא ידוע אם ההנחה המקורית נכונה.

האם יש מספרים אחרים ששונים מן הרציונלים?



$$\sqrt{2} = \frac{97.}{.....} = x$$

אבל x^2 לא יהיה שווה ל-2 במחשבון.

טענה: $\sqrt{2}$ לא מספר רציונלי

הוכחה: יש אך ורק שתי אפשרויות:

(1) $\sqrt{2}$ רציונלי.

(2) $\sqrt{2}$ לא רציונלי.

נניח שאוצפיה 1 נכונה.

אז $\sqrt{2}$ רציונלי כלומר קיימים שני מספרים שלמים m, n כך ש- $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$

$$m = \sqrt{2} \cdot n \quad \text{אז}$$

$$m^2 = 2n^2 \quad \text{אז}$$

לכל מספר טבעי יש הצבה יחידה כמכפלה של ראשוניים.

אז באגף שמאל, אחרי הפירוק, הגורם 2 יופיע מס' זוגי של פעמים.

באגף ימין אותו גורם יופיע מס' אי זוגי של פעמים.

$$2n^2$$

פעם אחת
מופיע מס' זוגי של פעמים

אבל זאת סתירה ליחידות ההצבה של מכפלה

של ראשוניים, לכן ההנחה ש- $\sqrt{2}$ רציונלי

לא נכונה ולכן בהכרח $\sqrt{2}$ לא רציונלי.

$$\mathbb{R} = \{\text{כל המספרים הרציונליים והאי-רציונליים}\}$$

(4) קבוצת המספרים הממשיים

הערה חשובה: לכל נקודה על ישר שבו נקודה ראשית בסימון 0, אפשר להתאים מספר ממשי

באופן הבא. אם נקודה נמצאת במרחק x מן הראשית והוא מימין של הראשית, אז לנקודה

נתאים את מספר x . אם הנקודה במרחק x מן השמאל לו, נתאים לה את המספר $-x$.

לסיכום: לכל מספר ממשי מתאימה בנקודה אחת ויחידה על הישר ולהפך.

המרחק של נקודה מן הראשית (על ישר הממשים).

לכל נקודה x על הישר נסמן ב- $d(0, x)$ את המרחק שלה מן הראשית.

$$d(x, 0) = d(0, x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \quad \text{מתקיים:}$$

הגדרה: ערך המוחלט

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \text{ אם} \\ -x & x < 0 \text{ אם} \end{cases}$$

מסקנה: הערך המוחלט של x מצביע על המרחק של נקודה x מן הראשית.

$$|-3| = -(-3) = 3 \qquad |2| = 2$$

המרחק בין שתי נקודות על הישר

שאלה: נניח ש- a, b נקודות על הישר, מה המרחק בין a ל- b ?

תשובה: נסמן $d(a, b)$ המרחק מ- a ל- b .

$$d(a, b) = b - a \quad \text{אם} \quad 0 < a < b$$

$$d(a, b) = a - b \quad \text{אם} \quad 0 < b < a$$

$$d(a, b) = \begin{cases} b - a & a - b < 0 \\ a - b & a - b > 0 \end{cases}$$

כלומר $d(a, b) = |a - b|$ לכל שני נקודות חיוביות.

נביח $a < b$

אז קיים מספר c כך ש- $a+c$ ו- $b+c$ יהיו חיוביות.
(למשל אפשר לבחור $c = |a| + |b| + 1$)

אז לפי מה שראינו קודם מתקיים:

$$d(a+c, b+c) = |(a+c) - (b+c)| = |a-b|$$

אבל זה גם שווה למרחק בין a, b .

$$d(a, b) = |a-b| \quad \text{לכן}$$

הוכחנו זאת לכל שתי נקודות שונות על הישר.

שוויון זה נכון גם כאשר $a=b$.

מסנקה: לכל שתי נקודות a, b על הישר הממשי,

$$d(a, b) = |a-b|$$

שיעור 1-ב (22.10.09)

שורשים

הגדרה את ערך המוחלט של מספר כך:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

וראינו ש- x הוא המרחק של x מהראשית.

שים לב ש- $3^2=9$ וגם $(-3)^2=9$

אבל אם נרשום ש- $\sqrt{9}=3$ וגם ש- $\sqrt{9}=-3$

נקבל $3=-3$. לא רצוי.

הגדרה: לכל $a > 0$ מסמנים ב- $\sqrt{a}$ את הפתרון החיובי של המשוואה $x^2=a$.
בנוסף, מגדירים $\sqrt{0}=0$.

מסקנה: אם $a > 0$ אז למשוואה $x^2=a$ יש בדיוק שתי פתרונות,
אחד חיובי $\sqrt{a}$
ואחד שלילי $-\sqrt{a}$

הערה: אם $a > 0$ קשה להוכיח שלמשוואה $x^2=a$ יש פתרון, לכל a כזה.
אבל אם מצאנו פתרון אחד, למשל $\sqrt{a}$, אז לא קשה להוכיח שכל
פתרונות המשוואה הם $\sqrt{a}$ ו- $-\sqrt{a}$.

הוכחה: נניח ש- t פתרון למשוואה $x^2=a$.
אז $t^2=a$ ולכן $t^2-a=0$.
 $t^2-(\sqrt{a})^2=0$ (ההנחה היא ש- $a > 0$)
 $(t-\sqrt{a})(t+\sqrt{a})=0$
ואז $t-\sqrt{a}=0$ או $t+\sqrt{a}=0$
ולכן $t=\sqrt{a}$ או $t=-\sqrt{a}$

שאלה: מהו $\sqrt{x^2}$ עבור x ממשי כלשהו?

תשובה: לפי ההגדרה של השורש הריבועי, $\sqrt{x^2}$ הוא מספר לא שלילי שריבועו שווה ל- x^2 .

אם x חיובי, אז ברור ש- x מספר לא שלילי שריבועו שווה ל- x^2 .

אם $x=0$ אז 0 הוא מספר לא שלילי שריבועו שווה ל- x^2 (שהוא 0).

אם x שלילי, אז $(-x)$ הוא מספר חיובי שריבועו שווה ל- x^2 .

מסקנה:

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

ולכן: $\sqrt{x^2} = |x|$

למשל: $\sqrt{2^2} = 2$ (כי במקרה זה $\sqrt{x^2} = x$, $x=2$)

$\sqrt{(-2)^2} = -(-2) = 2$ (כי במקרה זה $\sqrt{x^2} = -x$, $x=-2$)

שאלה: מה ניתן לומר על החישוב הבא?

$$\sqrt{(-2)^2} = [(-2)^2]^{\frac{1}{2}} = (-2)^1 = -2$$

הסדר הטענה: חוקי החזקות תקפים לבסיסים חיוביים בלבד.

$$(a^x)^b = a^{xb} \quad \text{נכון רק ל-} a \text{ חיובי.}$$

בפרט, חוקים אלה לא נכונים ל- $a = -2$.

תכונות הערך המוחלט

לכל x, y ממשיים מתקיים:

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| = 0$ אם ורק אם $x = 0$.
3. $|xy| = |x| \cdot |y|$
4. $|-x| = |x|$
5. $|x^n| = |x|^n$ (לכל n טבעי)
6. $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$ (לכל $y \neq 0$)
7. $|x + y| \leq |x| + |y|$ ("אי-שוויון המשולש")
8. אם $a > 0$ אז $|x| < a$ אם ורק אם $-a < x < a$.
9. אם $a > 0$ אז $|x| > a$ אם ורק אם $x > a$ או $x < -a$.
10. $-|x| \leq x \leq |x|$

הוכחות:

1. תוצאה מיידית מהגדרת הערך המוחלט.
2. תוצאה מיידית מהגדרת הערך המוחלט.

$$|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{\underbrace{x^2}_{\geq 0} \underbrace{y^2}_{\geq 0}} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^2} = |x| \cdot |y| \quad 3.$$

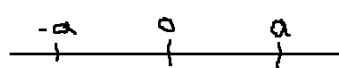
$$|-x| = |(-1)x| = |-1| \cdot |x| = |x| \quad 4.$$

$$|x^2| = |x \cdot x| = |x| \cdot |x| = |x|^2 \quad 5.$$

$$|x^3| = |x \cdot x^2| = |x| \cdot |x^2| = |x| \cdot |x|^2 = |x|^3 \quad \text{וכו'}$$

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \sqrt{\left(\frac{x}{y} \right)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{y^2}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{y^2}} = \frac{|x|}{|y|} \quad 6.$$

או "שיטת השבולול": $\left| \frac{x}{y} \right| = \left| x \cdot \frac{1}{y} \right| = |x| \cdot \overbrace{\left| \frac{1}{y} \right|}^{(3)} = |x| \cdot \frac{1}{|y|} = \frac{|x|}{|y|}$



8. אם $a < 0$ ו- $|x| < a$ אז המרחק ל- x מ-0 הוא קטן מ- a .

נימוק לפי ההגדרה.

ואם $x > 0$ אז $|x| = x$ ולכן $-a < x < 0$.

ואם $x < 0$ אז $|x| = -x$ לכן $-x < a$.

ואם $x = 0$ ברור ש- $|x| < a$ לכן בכל מקרה $-a < x < a$.

10. אם $x \geq 0$ אז $x = |x|$ לכן $-|x| \leq 0 \leq x = |x|$ כי $|x| \geq 0$ לכן $-|x| \leq x \leq |x|$.

אם $x \leq 0$ אז $-x \geq 0$ לכן לפי חלק הקודם של ההוכחה נקבל ש-

$$\underbrace{-|-x|}_{(-1) \text{ מפלג}} \leq (-x) \leq |-x|$$

$$-|x| \leq -x \leq x$$

$$|x| \geq x \geq -|x|$$

מ.ש.ל.

$$-|x| \leq x \leq \overset{\text{לפי 10}}{x} \quad .7$$

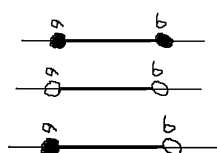
$$-|y| \leq y \leq |y|$$

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq \underbrace{|x| + |y|}_{\text{לפי 8, } a > 0}$$

$$|x + y| \leq \underbrace{|x| + |y|}_a \quad \text{לפי 8 נקבל:}$$

קטעים על הישר הממשי

בניח ש- $a \leq b$:



1. קטע סגור $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$

2. קטע פתוח $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$

3. $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$

4. $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$

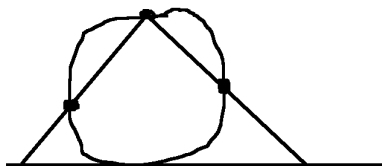
5. קרן סגורה ימינית $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}$

6. $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$

7. $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}$

8. קרן פתוחה $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$

9. $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$



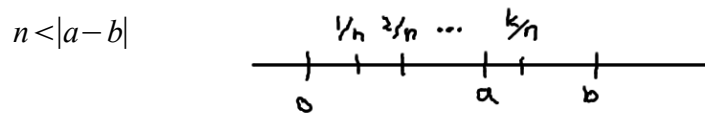
בין כל שני מספרים רציונלים יש מספר אי רציונלי.
בין כל שני מספרים אי רציונלים יש מספר רציונלי.
אין לזה חשיבות ממש.

שיעור 2-א (27.10.09)

צפיפות המספרים הרציונלים בישר הממשי

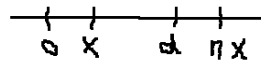
טענה 1: בין כל שני סמרפים ממשיים קיים מספר רציונלי.

נניח ש- $a, b \in \mathbb{R}$ ונניח ש- $a < b$.
צ"ל שקיים מספר $q \in \mathbb{Q}$ כך ש- $a < q < b$.



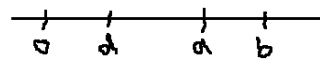
אקסיומות:

1. אקסיומת ארכמדס: לכל $x > 0$ ולכל $d > 0$ קיים n טבעי כך ש- $n \cdot x > d$.



2. אקסיומת הסדר הטוב ב- $\mathbb{N}$: לכל קבוצה לא ריקה של מספרים טבעיים יש איבר קטן ביותר.

הוכחת נסמן $d = b - a$ לפי ההנחה ש- $d > 0$.



טענה 1:

לפי אקסיומת ארכימדס קיים n טבעי כך ש- $nd > 1$ (כלומר $\frac{1}{n} < d$).

ושוב לפי אותה אקסיומה קיים k טבעי כך ש- $k \cdot \frac{1}{n} > a$.

לכן הקבוצה $\left\{ l \in \mathbb{N} \mid \frac{k}{n} > a \right\}$ היא קבוצה לא ריקה של מספרים טבעיים.

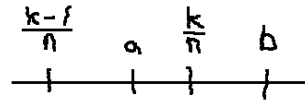
ולכן לפי אקסיומת הסדר הטוב קיים k קטן ביותר כך ש- $\frac{k}{n} > a$.

(המשך בדף הבא)

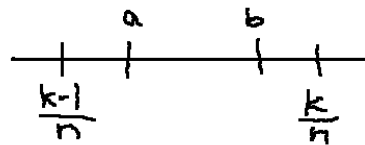
נוכיח כעת ש- $a < \frac{k}{n} < b$.

ידוע מעצם הגדרת $\frac{k}{n}$ ש- $a < \frac{k}{n}$ לכן נותר להוכיח ש- $\frac{k}{n} < b$.

נניח שזה לא נכון כלומר $b \leq \frac{k}{n}$ (הנחה).



מאחר ש- k היה קטן ביותר עם התכונה ש- $a < \frac{k}{n}$ נובע $\frac{k-1}{n} \leq a$ (עובדה).



לכן מצאנו ש- $\frac{k-1}{n} \leq a < b \leq \frac{k}{n}$.

לכן $\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} \geq b - a$

$$\begin{pmatrix} -a & \leq & -\frac{k-1}{n} \\ b & \leq & \frac{k}{n} \end{pmatrix}$$

כלומר $\frac{1}{n} \geq d$.

סתירה לבחירה של n כמספר המקיים $\frac{1}{n} < d$.

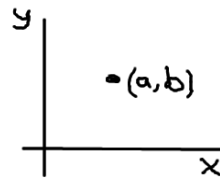
לא ייתכן ש- $b \leq \frac{k}{n}$ ולכן $\frac{k}{n} < b$.

מצאנו ש- $q = \frac{k}{n}$ מספר רציונלי המקיים $a < q < b$. ■

להוכיח שבין כל שני מספרים ממשיים קיים מספר אי רציונלי.

תרגול:
(בבית)

המישור



$$\mathbb{R}^2 = \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$$

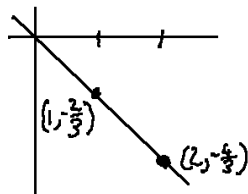
לכל נקודה במישור מתאים זוג סדור יחיד של מספרים ממשיים ולהפך.

משוואה בשני נעלמים וקבוצות נקודות במישור

דוגמה 1: **נתונה המשוואה $2x + 3y = 0$**

הקבוצת כל פתרונות המשוואה היא $\{ (t, -\frac{2}{3}t) \mid t \in \mathbb{R} \}$

וזו קבוצה של נקודות במישור.



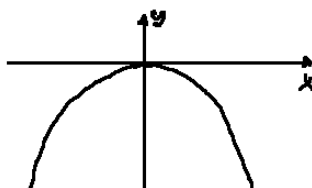
קבוצת הפתרונות הוא

הישר העובר דרך $(0,0)$ ו- $(1, -\frac{2}{3})$.

דוגמה 2: **נתונה המשוואה $2x^2 + 3y = 0$**

הקבוצת כל פתרונות המשוואה היא $\{ (x, -\frac{2}{3}x^2) \mid x \in \mathbb{R} \}$,

פרבולה במישור.



אפשר לרשום את אותה קבוצה גם כך:

$$\frac{2}{3}x^2 = -y$$

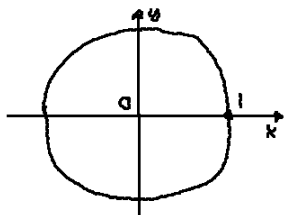
זה מחייב ש- $y \leq 0$

$$x = \pm \sqrt{-\frac{3}{2}y}$$

$$\{ (\pm \sqrt{-\frac{3}{2}y}, y) \mid y \leq 0 \}$$

דוגמה 3:

נתונה המשוואה $x^2 + y^2 = 1$.



הקבוצת כל פתרונות המשוואה
הוא מעגל ברדיוס 1 שמרכז בראשית.

ניתן לתאר את קבוצת הפתרונות כך:

$$\{ (x, \pm\sqrt{1-x^2}) \mid -1 \leq x \leq 1 \}$$

הסדר:

$$y^2 = 1 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$$

(שהפתרון רק בתנאי ש- $1 - x^2 \geq 0$ כלומר $-1 \leq x \leq 1$)

$$\text{ואז } y = \pm\sqrt{1-x^2}$$

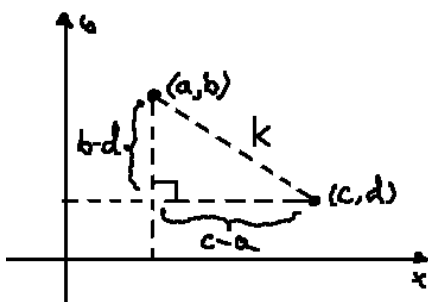
המרחק בין שתי נקודות במישור

הגדרה:

לפי פיתגורס:

$$k^2 = (c-a)^2 + (b-d)^2$$

$$k = \sqrt{(c-a)^2 + (b-d)^2}$$



לכן, באופן כללי המרחק בין שתי נקודות (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2) במישור

$$\text{הוא } d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$\frac{(x_1, 0) \quad (x_2, 0)}{\text{---}}$$

אם שתי נקודות $(x_1, 0)$ ו- $(x_2, 0)$ הן על ציר x אז

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = |x_1 - x_2|$$

מסקנה:

המרחק של נקודה (x, y) (במישור) מהראשית הוא:

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

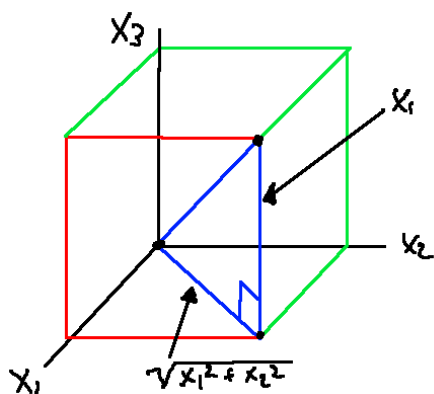
פתרונות המשוואה $x^2 + y^2 = 1$ הן כל הנקודות המקיימת $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$
כלומר כל הנקודות שנמצאות במרחק 1 מן הראשית (מעגל).

הערה:

המרחק בין נקודה במרחב (x_1, x_2, x_3) לבין הראשית $(0,0,0)$

$$d = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \text{ הוא}$$

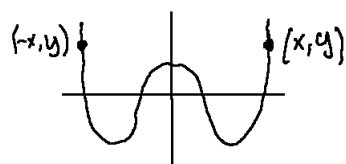
$$d^2 = (x_1^2 + x_2^2) + x_3^2$$



מסקנה:

קבוצת הפתרונות של משוואה בשני נעלמים הוא קבוצה של נקודות על המישור. (בדרך כלל מקבלים עקומה מסוימת במישור).

תכונות של קבוצות במישור

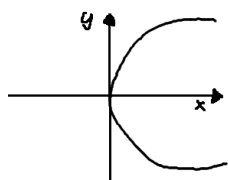


1. **סימטריה של A לגבי ציר y:**

מובטחת על-ידי התנאי:

אם $(x, y) \in A$ אז גם $(-x, y) \in A$.

למשל: $A = \{ (x, |x|) \mid x \in \mathbb{R} \}$ או $A = \{ (x, x^2) \mid x \in \mathbb{R} \}$

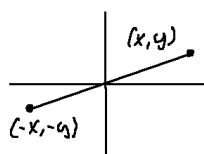


2. **סימטריה לגבי ציר x:**

לכל $(x, y) \in A$ גם $(x, -y) \in A$

למשל $\{ (x^2, x) \mid x \in \mathbb{R} \}$

וגם קבוצות הפתרונות של המשוואה $x^2 + y^2 = A$ (היא סימטרית ביחס לשני הצירים).



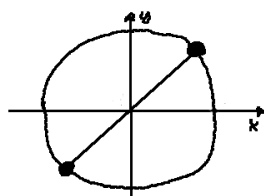
3. **סימטריה לגבי הראשית**

לכל $(x, y) \in A$ גם $(-x, -y) \in A$.

$$A = \{ (ta, tb) \mid t \in \mathbb{R} \}$$

דוגמאות:

וגם קבוצת הפתרונות של $x^2 + y^2 = 1$ בעלת נכונה זו.



אבל עבור $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$ - קבוצת הפתרונות הוא סימטרית לגבי שני הצירים וגם לגבי הראשית.

שיעור 2-ב (29.10.09)

פונקציות

הגדרה: פונקציה f היא התאמה שמתאימה לכל איבר קבוצה A (הנקראת תחום הגדרה) איבר אחד ויחיד בקבוצה B (הנקראת טווח).

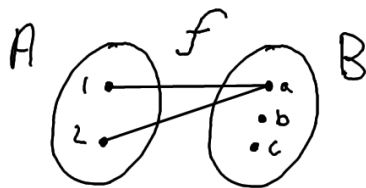
נוהגים לסמן פונקציה הזו גם כך:

$$f: A \rightarrow B$$

מאחר שלכל איבר x בתחום הגדרה מתאים איבר אחד ויחיד בטווח, נוכל לסמן בגלל זה עבור כל $x \in A$ את האיבר המתאים לו בטווח על-ידי f ב- $f(x)$.
(איבר זה נקרא גם התאמה של x ע"י f).

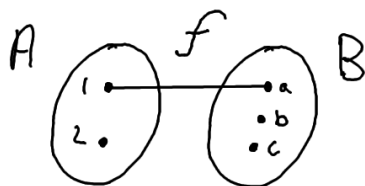
x נקרה מקור של $f(x)$

דוגמאות:



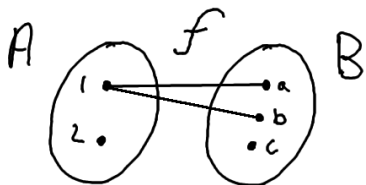
$$\begin{aligned} f(1) &= a \\ f(2) &= a \end{aligned} \quad .1$$

זו פונקציה.
היא מקיימת כל תנאי ההגדרה.



$$f(1) = a \quad .2$$

לא פונקציה.
ל-2 השייך לתחום לא מתאים כלום.



$$f(1) = a, b \quad .3$$

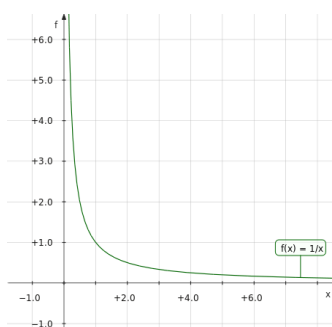
לא פונקציה.
ל-1 שבתחום מתאימים שני איברים בטווח.

גרף של פונקציות

הגדרה: הגרף של הפונקציה $f: A \rightarrow B$ מוגדר כך:

$$G_f = \{ (x, f(x)) \mid x \in A \}$$

מסקנה: הגרף של פונקציה $f: A \rightarrow B$ (כאשר $A, B \subseteq \mathbb{R}$) הוא קבוצה של נקודות במישור. היא בעצם קבוצת כל פתרונות המשוואה $y = f(x)$. (כלומר, הגרף מורכב מקבוצת כל הנקודות (x, y) שבהן $y = f(x)$).



דוגמאות: הגרף של הפונקציה

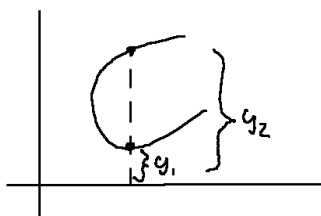
$$f: (0, 1] \rightarrow (0, \infty)$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

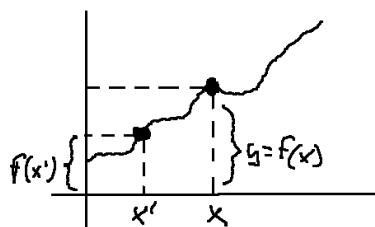
נראה כך:

באופן כללי: הגרף של פונקציה $(A, B \subseteq \mathbb{R} \mid f: A \rightarrow B)$

אבל לא יכול להיות עקומה כזו:



יכול להיות עקומה במישור.



כמסקנה מהגדרת הפונקציה מקבלים את:

מבחן הקן האונכי לאמת גרף של פונקציה

הגדרה: בכל נקודה שבתחום ההגדרה, קו המאונך לציר x באותה נקודות חותך את הגרף בנקודה אחת בלבד.

לא גרף של פונקציה:



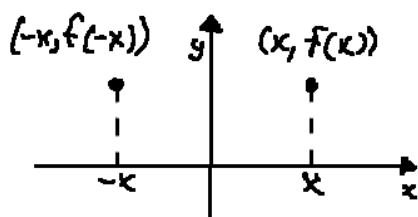
גרף של פונקציה:



לכן:

תכונות פשוטות של גרפים של פונקציות

1. סימטריה ביחס לציר y.



התנאי הוא $f(x) = f(-x)$

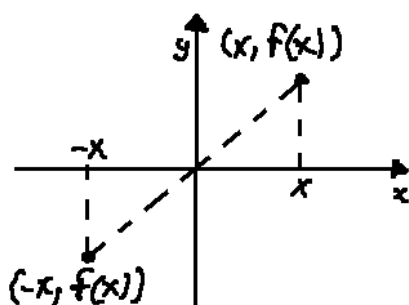
הגדרה: פונקציה f נקראת **זוגית** אם $f(x) = f(-x)$ לכל x בתחום הגדרה.

מסקנה: f זוגית אם ורק אם הגרף שלה סימטרי ביחס לציר y.

דוגמאות:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ f(x) &= 1 + 3x^2 + 5x^4 \quad (\text{יש רק חזקות זוגיות של } x) \\ f(x) &= |x| = \sqrt{x^2} \\ f(x) &= \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (\text{נדע למה בהמשך}) \end{aligned}$$

2. סימטריה ביחס לראשית.

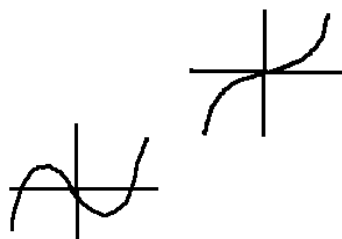


מובטחת על ידי $f(-x) = -f(x)$

הגדרה: פונקציה f נקראת **אי זוגית** אם $f(-x) = -f(x)$ לכל x בתחום הגדרה.

מסקנה: f אי זוגית אם ורק אם הגרף שלה סימטרי ביחס לראשית.

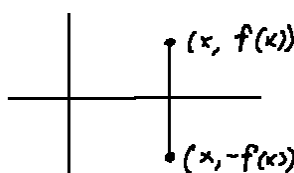
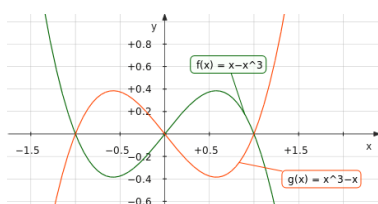
דוגמאות:



$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ f(x) &= x^3 \\ f(x) &= x^3 - x \\ f(x) &= \sin x = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

3. הקשר בין הגרף של $g = -f(x)$ ו- $g = f(x)$

הגרף של $y = -f(x)$ הוא שיקוף ביחס לציר x של הגרף של $g = f(x)$.

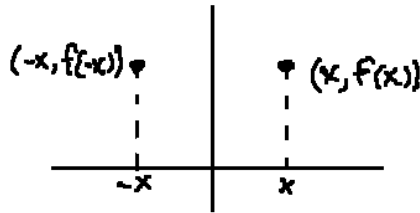


זו נקודה של הגרף $y = f(x)$

זו נקודה של הגרף $y = -f(x)$

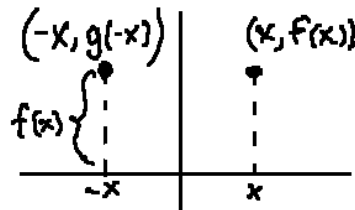
4. הקשר בין הגרף של $g = f(x)$ ו- $g = f(-x)$

זו נקודה
על הגרף
של $y = f(-x)$



נסמן
 $g = f(x)$
 $g = f(-x)$

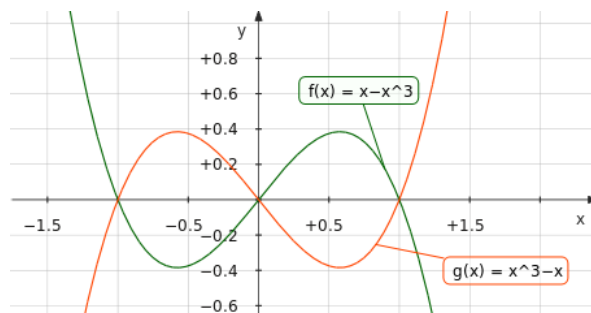
על הגרף
של g



על הגרף
של f

לכל נקודה על הגרף של g מתאימה נקודה סימטרית
לה היחס לציר y על הגרף של f .

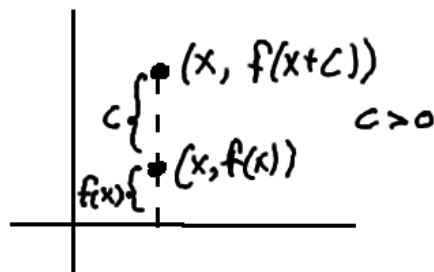
מסקנה: הגרף של $y = f(-x)$ מקבלת על ידי
שיקוף לציר y של הגרף של $y = f(x)$.



דוגמה:

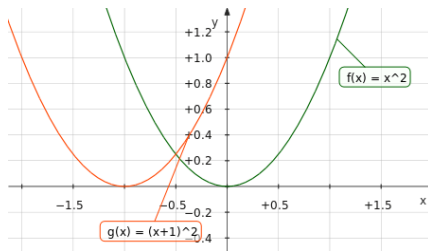
5. הקשר בין הגרף של $y = f(x)$ לבין הגרף של $y = f(x) + c$

לכל נקודה $f(x)$ על הגרף של x מתאימה
נקודה $(x, f(x) + c)$ על הגרף של הפונקציה השנייה.



לכן הגרף של $y = f(x) + c$ מתקבל על ידי
הזזה של הגרף של $y = f(x)$ ב- c יחידות במקביל לציר ה- y .

6. הקשר בין הגרף של $y=f(x)$ לבין הגרף של $y=f(x+a)$



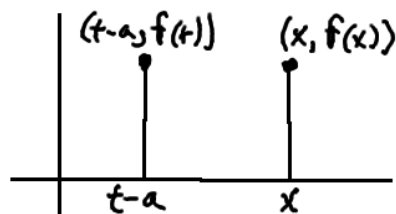
למשל:

$$f(x) = x^2$$

$$f(x+1) = (x+1)^2$$

אם $(x, f(x+a))$ נקודה על הגרף של $y=f(x+a)$ אז נסמן $t=x+a$ אז הנקודה הנ"ל היא $(t-a, f(t))$ - נקודה על הגרף של $y=f(x+a)$ כאשר $(t, f(t))$ על הגרף של f .

לכן: אם $(t, f(t))$ נקודה על הגרף של $y=f(x)$ אז $(t-a, f(t))$ נקודה על הגרף של $y=f(x+a)$.



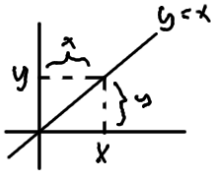
גרף של
 $y=f(x)$

גרף של
 $y=f(x+a)$

מסקנה: הגרף של $y=f(x+a)$ מקבלת על ידי הזזת הגרף של $y=f(x)$ ב- $(-a)$ יחידות במקביל לציר ה- x .

שיעור 3-א (03.11.09)

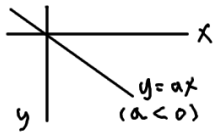
הגדרה: פונקציות לינאריות הן פונקציות בעלות גרף שהיא קו ישר במישור.



דוגמה: $f(x)=x$ ז"א, $y=x$

מכאן נובע שאם למשל $x>0$

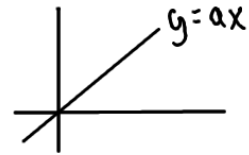
אז הגרף של $f(x)=ax$ נראה כך:



$$f(x)=0$$

$$f(1)=a$$

$$f(2)=2a$$



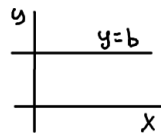
ז"א קו ישר דרך הראשית בשיפוע a .

מסקנה: הגרפים של הפונקציות $f(x)=a$ מייצגים את כל הישרים במישור העוברים דרך הראשית למעט ציר y .

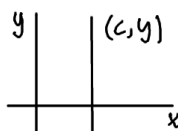
כל ישר אחר מתקבל על ידי הצצה (למשל במקביל לציר y) של ישר דרך הראשית לכן כל ישר במישור (למעט אלה שמאונכים לציר x) הוא גרף של פונקציה מהצורה $y=ax+b$.

הגדרה: פונקציה לינארית היא פונקציה מהצורה $f(x)=ax+b$ או $y=ax+b$.

הערות:



1. בין הגרפים של הפונקציות הנ"ל נמצאים הישרים המקבילים לציר x .
כאשר $x=0$, $f(x)=b$.

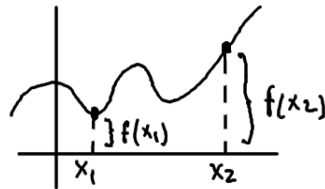


2. הישרים המאונכים לציר x אינם כלולים בגרפים של הפונקציות הלינאריות. (הם לא יכולים להיות גרפים של פונקציה).

עדיין נאמר שהמשווה של הישר המאונך לציר x בנקודה $(c,0)$ היא $x=c$. (יש להבחין בין הנקודה $x=c$ ז"א הנקודה (x,c) לבין הישר $x=c$ שבו, הכוונה לפתרונות המשוואה $x+0y=c$).

מסקנה: הישרים במישור (כולם!) מיוצגים על ידי משוואה מהצורה $ax+by+c=0$ כאשר $|a|+|b|\neq 0$ כלומר $a^2+b^2\neq 0$ (לא שניהם שווים ל-0)

אם $b\neq 0$ נקבל $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$, ישר שהוא גרף של פונקציה.
אם $b=0$ ו- $a\neq 0$ אז $x=-\frac{c}{a}$, ישר מאונך לציר x.

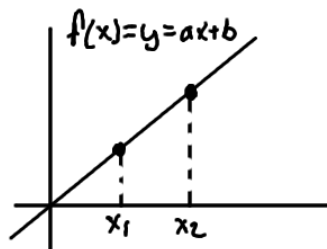


הערה: השינוי שחל בפונקציה כאשר x משתנה מ- x_1 ל- x_2 הוא $f(x_2)-f(x_1)$

השיפוע הממוצע של הפונקציה אשר x משנה מ- x_1 ל- x_2 הוא

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

טענה: אם f פונקציה לינארית אז השינוי היחסי שלה בכל קטע הוא קבוע.

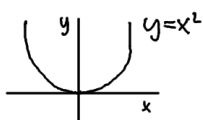


$$\begin{aligned} & \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \\ &= \frac{(ax_2+b)-(ax_1+b)}{x_2-x_1} \\ &= a \frac{(x_2-x_1)}{x_2-x_1} \\ &= a \end{aligned}$$

a נקרא שיפוע הישר (הרגף).

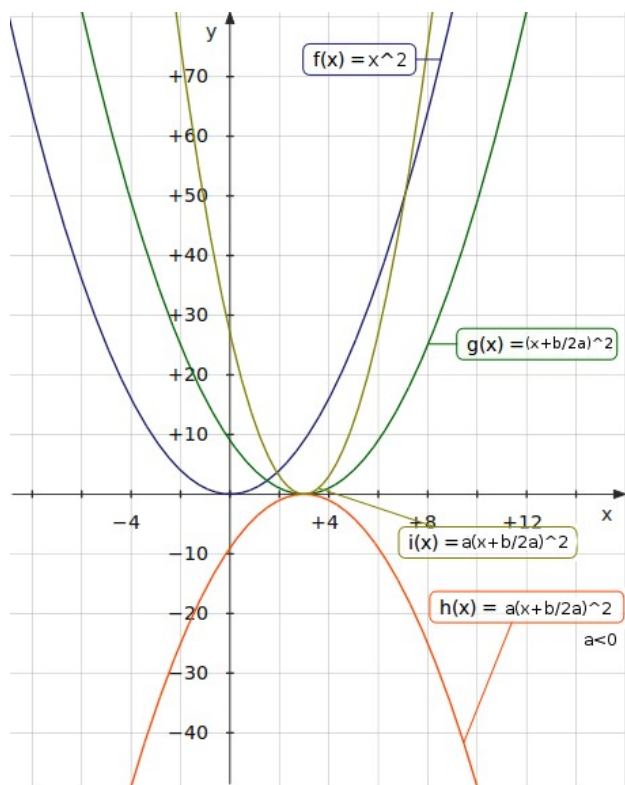
פונקציות ריבועיות

הגדרה: פונקציות מהצורה $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$) נקרא **פונקציות ריבועיות**.



דוגמה: $f(x)=x^2$

גרף סימטרי לציר ה-y (כי זו פונקציה זוגית).



באופן כללי, ניתן לרשום כך:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left[\underbrace{\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right)}_{\text{ריבוע}} + \underbrace{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}}_{\text{קבוע}}\right] \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + a\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) \end{aligned}$$

מסקנה:

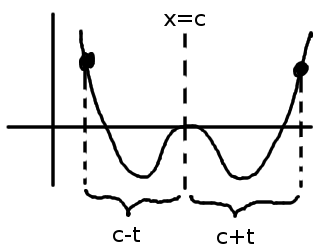
הגרפים של
הפונקציות ריבועיות
 $f(x) = ax^2 + bx + c$
($a \neq 0$)

הערה חשובה: הרגף של $f(x) = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$

היא הזזה של גרף הפונקציה $y = x^2$.

לכן, כפי שהגרף של $y = x^2$ סימטרי ביחס לציר $x=0$, כך יהיה

הגרף של $y = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ סימטרי ביחס לישר $x + \frac{b}{2a}$
(שהיא ההזזה המתאימה של הישר $x=0$)



מה התנאי שגרף הפונקציה $y = f(x)$
היא סימטרי ביחס לציר $x=c$?

שאלה:

$$f(c+t) = f(c-t) \quad \text{לכל } t$$

תשובה:

שעבורו $c-t$ ו- $c+t$ בתחום הגדרה.

זו הצצה ב- $-\frac{b}{2a}$ במקביל לציר x .

הגרף של הפונקציה $f(x) = ax^2 + bx + c$ הוא **סימטרי** ביחס לישר $x = -\frac{b}{2a}$.

מסקנה:

לפונקציה זו יש **ערך קטן ביותר** ב- $x = -\frac{b}{2a}$ כאשר $a > 0$

וערך גדול ביותר בנקודה זו כאשר $a < 0$.

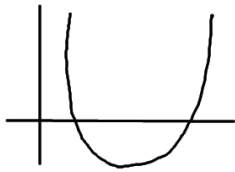
הסדר אלגברי

לדוגמא:

$$(x+2)^2 - 5 \geq -5 \quad ax^2 + bx + c = a \left[\underbrace{\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right)}_{\text{ריבוע}} + \underbrace{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}}_{\text{קבוע}} \right]$$

המינומים מתקבל כאשר $x = -2$

לכן לביטוי שבסוגריים יש ערך מינימלי מוחלט כאשר $x = -\frac{b}{2a}$.
ולכן כאשר $a > 0$ לביטוי כולו $(ax^2 + bx + c)$ יש מינימום עבור $x = -\frac{b}{2a}$
ואם $a < 0$ אז לביטוי יש מקסימום עבור $x = -\frac{b}{2a}$.



הגדרה: **פרבולה** במישור היא גרף של פונקציה ריבועית.

שאלה: כיצד פותרים את הריבוע $ax^2 + bx + c = 0$?
(מהן נקודות החיתוך של הגרף עם ציר x)

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \quad \text{המשוואה הנ"ל שקולה ל-}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad \text{כלומר}$$

לכן אם $b^2 - 4ac \geq 0$ (קוראים לו דלתא - Δ)

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|} \quad \text{כלומר} \quad x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

(בגלל ה- $\pm$ מותר לוותר על הערך המוחלט).

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \quad \text{לכן}$$

מסקנה: אם $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ למשוואה $ax^2 + bx + c = 0$ יש שתי פתרונות שונים

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

אם $\Delta = 0$ יש פתרון יחיד $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

אם $\Delta < 0$ אין פתרון.

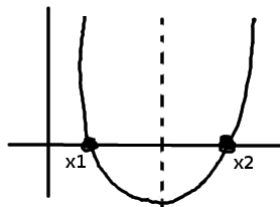
תרגול: להוכיח שכאשר $\Delta \leq 0$ אז $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ו- $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. (רמז: הצבה)

שיעור 3-ב (05.11.09)

פונקציות ריבועיות (המשך)

טענה: אם x_1, x_2 פתרונות למשוואה $ax^2 + bx + c = 0$

אז $x_1 + x_2 = -\frac{b}{2a}$ ו- $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.



השיעור x של הקודקוד היא
הממוצע החשבוני של השורשים.

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$$

טענה: הפירוק לגורמים של ביטוי ריבועי

אם x_1, x_2 פתרונות למשוואה $ax^2 + bx + c = 0$

אז $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

הוכחה:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \underbrace{\frac{b}{a}x}_{-(x_1+x_2)} + \underbrace{\frac{c}{a}}_{x_1 \cdot x_2}\right) = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2] = a(x - x_1)(x - x_2)$$

דוגמאות: $3x^2 + 10x + 3 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 36}}{6}$$

$$x_1 = \frac{-10 - 8}{6} = -3 \quad x_2 = \frac{-10 + 8}{6} = -\frac{1}{3}$$

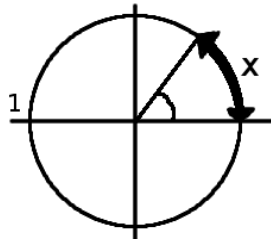
$$= 3(x + 3)\left(x + \frac{1}{3}\right) = (x + 3)(3x + 1)$$

$$2x^2 + 10x + 3$$

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 24}}{4} = \frac{-10 \pm 2\sqrt{19}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{19}}{2}$$

$$= 2\left(x + 5 + \frac{\sqrt{19}}{2}\right)\left(x + 5 - \frac{\sqrt{19}}{2}\right)$$

פונקציות טריגונומטריות



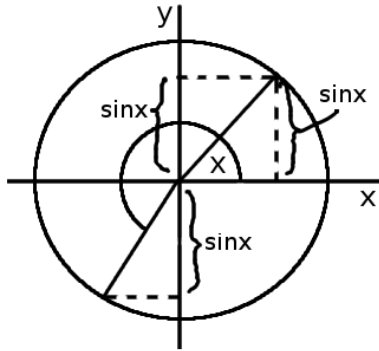
הגדרה: מעגל טריגונומטרי הוא מעגל ברדיוס 1 שמרכזו בראשית הצירים.

לכל זווית מתאים מספר ממשי אחד ויחיד שהוא אורך הקשת שהזווית הנ"ל נשענת עליה בזווית מרכזית במעגל הטריגונומטרי. המספרים הנ"ל הם מספרים ממשיים הנקרים **רדיאנים**.

הקשר בין רדיאנים וזוויות

<u>זווית</u>	<u>אורך הקשת במעגל הטריגונומטרי</u>
360°	$\sim 2\pi$
$\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = \left(\frac{360}{2\pi}\right)^\circ$	~ 1
$\left(\frac{180x}{\pi}\right)^\circ$	$\sim x$
180°	$\sim \pi$
90°	$\sim \frac{\pi}{2}$
1°	$\sim \frac{\pi}{180}$

פונקציות הסינוס (sin)



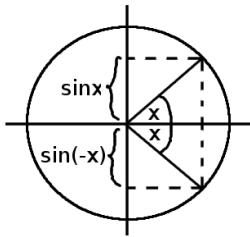
הגדרה: לכל זווית x מגדירים את $\sin x$ כהיטל על ציר y של הרדיוס המתאים לזווית המרכזית x במעל הטריגונומטרי.

תכונות:

1. $-1 \leq \sin x \leq 1$ (כלומר $|\sin x| \leq 1$)

2. $\sin x = 0$ כאשר $x = k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$
 $\sin x = 1$ כאשר $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$
 $\sin x = -1$ כאשר $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

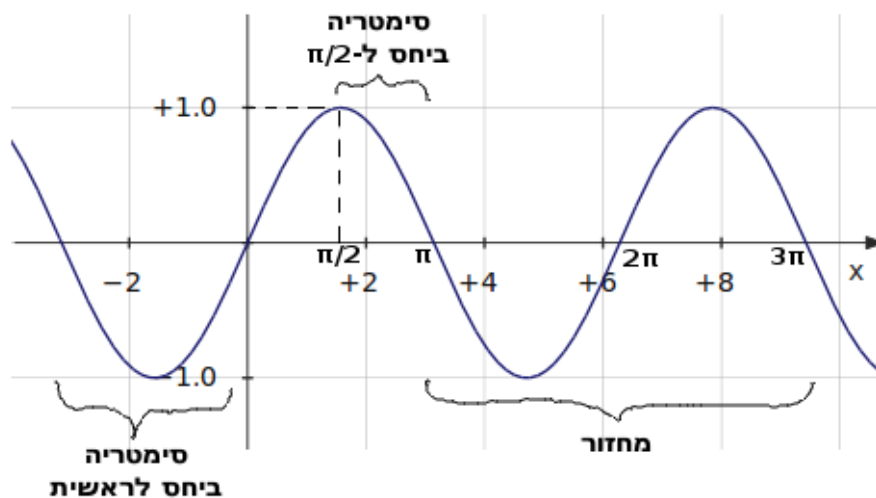
3. לכל x , $\sin(x + 2\pi) = \sin x$
 $\sin$ פונקציה מחזורית עם מחזור 2π



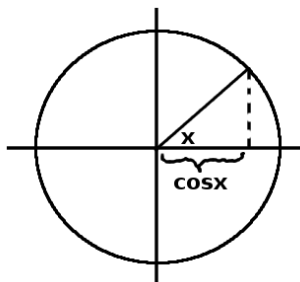
אי זוגית
 $f(-x) = -f(x)$

4. לכל x , $-\sin x = \sin(-x)$
 $\sin$ פונקציה אי זוגית.

הגרף של sin



פונקציה $\cos$



הגדרה: לכל מספר ממשי x , $\cos x$ הוא היטל הרדיוס המתאים לזווית x במעגל הטריגונומטרי על ציר x .

תכונות:

1. לכל x , $-1 \leq \cos x \leq 1$ (כלומר $|\cos x| \leq 1$)

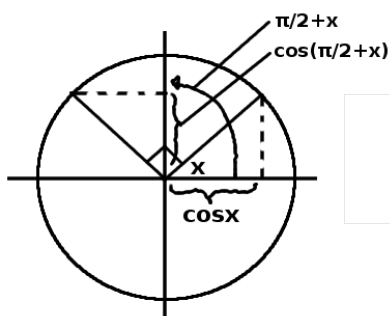
2. $\cos x = 0$ כאשר $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\cos x = 1$ כאשר $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\cos x = -1$ כאשר $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

3. לכל x , $\cos(x + 2\pi) = \cos x$

$\cos$ פונקציה מחזורית עם מחזור 2π

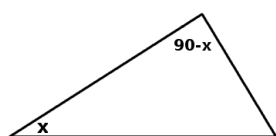
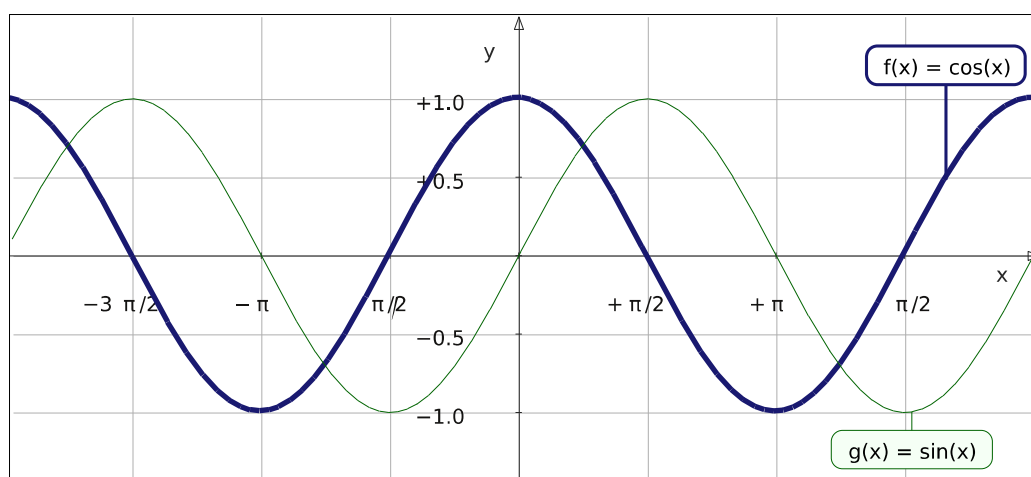


זוגית
 $f(x) = f(-x)$

4. לכל x , $\cos x = \cos(-x)$
 $\cos$ פונקציה זוגית.

5. $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$, ולכן:

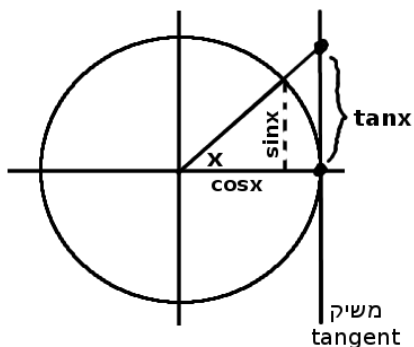
6. הגרף של $\cos$ מתקבל ע"י הזזה ב- $-\frac{\pi}{2}$ של הגרף של $\sin$ במקביל לציר x .



(משפט פיתגורס) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

טענה:

הפונקציה $\tan$



הגדרה: לכל מספר x , ש- $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

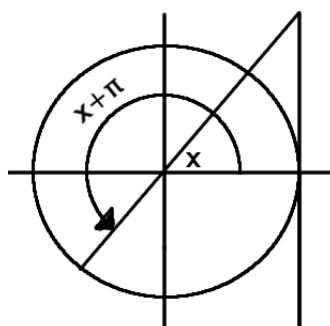
$\tan x$ מוגדר כאורך הקטע הנוצר על המשיק של מעגל הטריגונומטרי בנקודה $(1,0)$ ע"י ציר x והדריס המתאים ל- x .

$$\frac{\tan x}{1} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

תכונות:

1. $\tan x = -\tan(x)$ לכל x בתחום ההגדרה

$\tan$ היא פונקציה אי זוגית.

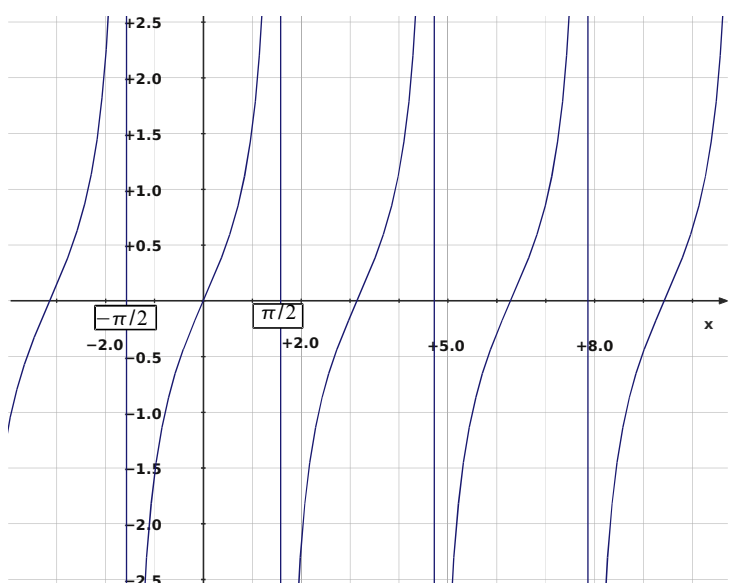


$$\tan(-x) = \sin \frac{(-x)}{\cos}(-x) = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x \quad \text{הוכחה:}$$

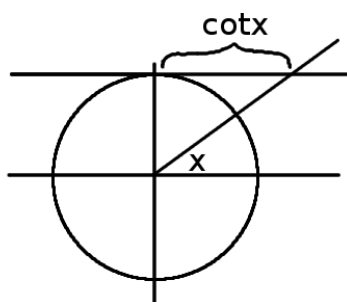
2. $\tan(x + \pi) = \tan x$ לכל x בתחום ההגדרה

$\cos$ פונקציה מחזורית עם מחזור π

הגרף של $\tan$



הפונקציה $\cot$

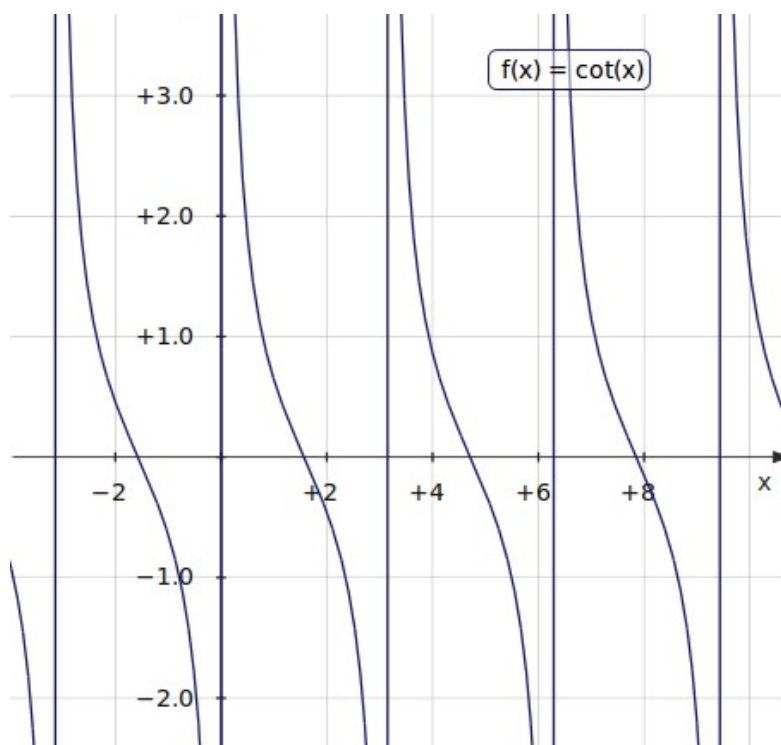


הגדרה: לכל מספר x , ש- $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 $\cot x$ הוא אורך הקטע הנוצר על
 המשיק המעגל הנקודה $(0,1)$ על
 מעגל הטריגונומטרי בין ציר y לבין
 הרדיוס המתאים ל- x .

תכונות:

1. $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ לכל x בתחום ההגדרה
2. $\cot x = -\cot(x)$ לכל x בתחום ההגדרה
 $\tan$ היא פונקציה אי זוגית.
3. $\cot(x + \pi) = \cot x$ לכל x בתחום ההגדרה
 $\cos$ פונקציה מחזורית עם מחזור π

הגרף של $\cot$



קשרים בין פונקציות טריגונומטריות

$$1. \quad f(x \pm \pi) = \pm f(x) \quad \text{הסימן של } f \text{ ברביע של } \pi \pm x$$

$$2. \quad f\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \pm \operatorname{cof}(x) \quad \text{הסימן של } f \text{ ברביע של } \frac{\pi}{2} \pm x$$

$$3. \quad f\left(\frac{3\pi}{2} \pm x\right) = \pm \operatorname{cof}(x) \quad \text{הסימן של } f \text{ ברביע של } \frac{3\pi}{2} \pm x$$

נכון לכל פונקציה טריג f

למשל:

$$1. \quad \sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$2. \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin x \quad (\text{ריבוע שלישי})$$

cos	sin
—	+
+	—
—	—
+	+

שיעור 4-א (10.11.09)

פעולות עם פונקציות

הגדרה: נניח ש- $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ו- $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ כאשר $A, B \subseteq \mathbb{R}$

1. **חיבור הפונקציות** הנ"ל הוא הפונקציה המסומנת ב- $f+g$ ומוגדרת כך:

$$f+g: A \cap B \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{לכל } x \in A \cap B \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

2. **כפל הפונקציות** הנ"ל היא הפונקציה המסומנת ב- fg ומוגדרת כך:

$$fg: A \cap B \rightarrow \mathbb{R} \\ (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

מקרה פרטי: אם למשל $f(x) = c$ פונקציה קבועה שמוגדרת לכל x אז

$$f \cdot g = c \cdot g$$

$$\text{ונקבל ש- } c \cdot g: B \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{לכל } x \in B \quad (cg)(x) = cg(x)$$

3. **המנה** של שתי פונקציות הנ"ל מסומנת ב- $\frac{f}{g}$ ומוגדרת כך:

$$\frac{f}{g}: A \cap B \cap \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

הערה: באמצעות הפעולות שהגדרנו ניתן ליצור מהפונקציות $f(x) = x$ והפונקציה הקבועות שמוגדרות לכל x , את הפונקציות הבאות:

1. **הפונקציות הפולינומליות**

$$P(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

אם $a_n \neq 0$ היא המקדמה של החזקה ביותר של x .
נאמר ש- $P(x)$ פולינום במעלה n .

2. הפונקציות הרציונליות:

אלה הן כל הפונקציות מהצורת

$$h(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

כאשר $P(x)$ ו- $Q(x)$ פולינומים.

תחום ההגדרה h הוא

$$\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x)=0\}$$

$$\mathbb{R} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$$

אם Q אינו פולינום האפס אז h מוגדרת ב- $\mathbb{R}$ למעט מספר סופי של נקודות (למשוואה $Q(x)=0$ יש רק מספר סופי של פתרונות).

למשל $h(x) = \frac{x^5 + 5x + 3}{x^3 - 2x^2 + 3x - 2}$ פונקציה רציונלית.

הרכבת פונקציות

הגדרה: נניח ש- $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ו- $g: B \rightarrow \mathbb{R}$. מגדירים את הפונקציה ההרכבה כך:

$$g \cdot f: \{x \in A \mid f(x) \in B\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(g \cdot f)(x) = g(f(x)) \quad \text{לכל } x \text{ בתחום ההגדרה}$$

כלומר $(g \cdot f)(x)$ מוגדר בכל תחום של f שעבורו $f(x)$ שייך לתחום של g .

דוגמה: $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{x}{x-2}$

$g: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$

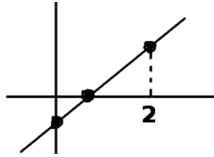
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x}{x-2}\right)$$

$$= \frac{\frac{x}{x-2} + 1}{\frac{x}{x-2} - 1} = \frac{\frac{2x-2}{x-2}}{\frac{2}{x-2}}$$

$$= \frac{2x-2}{2} = x-1$$

תחום ההגדרה: $g \circ f$ מוגדרת לכל x שעבורו $f(x)$ מקיים $g(f(x))$, כלומר $x \neq 2$,
וגם $f(x)$ בתחום של g , כלומר $f(x) \neq 1$

נשים לב ש- $f(x)=1$ כאשר $x=x-2 \Leftrightarrow \frac{x}{x-2}=1$ וזה לא קורה.

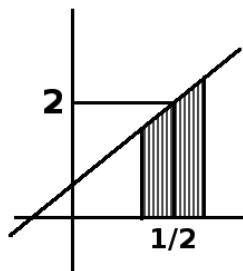


לכן תחום ההגדרה של $g \circ f$ הוא $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

גבול של פונקציות בנקודה

דיון מקדים:

1. נניח ש- $f(x)=2x+1$



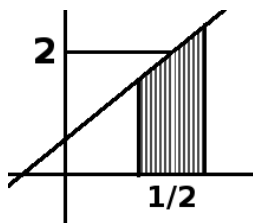
ככל שנציב ב- $f(x)$ ערכים של x קרובים יותר ל- $\frac{1}{2}$,
נקבל ערכים של $f(x)$ קרובים יותר ל-2.

נשים לב שניתן בדרך זו להתקרב ל-2 ככל שנרצה
על-ידי הצבת ערכים מספיק קרובים ל- $\frac{1}{2}$ ב- $f(x)$

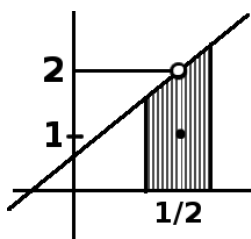
כמו כן, נשים לב שלכל מידה של קרבה ל-2 שנרצה, ניתן
למצוא קטע מסביב לנקודה 2 שבו $f(x)$ קרוב כרצוננו ל-2 עבור כל x בקטע.
(כל ערכי הפונקציה קרובים ולא רחוקים).

$$f(x) = \frac{4x^2 - 1}{2x - 1} = \frac{(2x + 1)(2x - 1)}{2x - 1} \quad 2.$$

הפונקציה מוגדרת לכל $x \neq \frac{1}{2}$ ו- $f(x)=2x+1$ לכל $x \neq \frac{1}{2}$.



גם במקרה זה לכל מידה של קרבה שנרצה,
ניתן למצוא קטע מסביב ל- $\frac{1}{2}$ שבו כל הערכים
של $f(x)$ קרובים ל-2 במידה שנרצה,
למעט $f(\frac{1}{2})$ שלא קיים.



3. פונקציה שמודגרת לכל x $f(x) = \begin{cases} \frac{4x^2-1}{2x-1} & x \neq \frac{1}{2} \\ 1 & x = \frac{1}{2} \end{cases}$

מה ניתן לומר על התנהגות הפונקציה כאשר x קרוב ל- $\frac{1}{2}$?

תשובה: אומנם $f(\frac{1}{2})=1$ אבל לכל נקודה שקרובה ל- $\frac{1}{2}$ ושונה מ- $\frac{1}{2}$, ערכי הפונקציה קרובים ל-2.

הערה: בשלישת המקרים הנ"ל, נאמר שלפונקציה יש גבול בנקודה $x = \frac{1}{2}$ והוא שווה ל-2.

יוסמן $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 2$

עוד הערות:

1. כדי לדבר על גבול של פונקציה $f(x)$ בנקודה $x=a$, חייבת להיות מוגדרת מסביב לנקודה אך הוא לא חחבית להיות מוגדרת ב- a עצמו.

2. הגבול עצמו מתאר את התנהגות הפונקציה בסביבת הנקודה a ללא תלות לערך הפונקציה בנקודה.

סימון: I_a^* סימון לקטע פתוח שמרכזו ב- a .

$$\begin{array}{c} a - \delta \qquad a + \delta \\ \text{---} (\quad) \text{---} \\ \qquad \qquad \circ \\ \qquad \qquad a \end{array} \quad \begin{array}{l} I_a^* = (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\} \\ = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta) \end{array}$$

כלומר קטע פתוח פחות a .

הגדרה: **מושג הגבול**

נניח ש- f פונקציה מוגדרת בקטע פתוח שמכיל את הנקודה a למעט אולי a . נאמר שמספר L הוא גבול של f בנקודה a . נסמן:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

אם לכל $\epsilon > 0$, I_a^* כך ש- $|f(x) - L| < \epsilon$ לכל $x \in I_a^*$

כלומר, לכל מידת קרבה $\epsilon > 0$ יש קטע I_a^* שבו, לכל x , $f(x)$ קרוב ל- L עד כדי ϵ .

$$\begin{aligned} L - \epsilon &< f(x) < L + \epsilon \\ \text{של } x = I_a^* \quad -\epsilon &< f(x) - L < \epsilon \\ |f(x) - L| &< \epsilon \end{aligned}$$

דוגמה: נוכיח ש- $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x - 1} = 2$ בעזרת הגדרת הגבול.

ידוע ש- $f(x) = 2x + 1$ לכל $x \neq \frac{1}{2}$.

צ"ל שלכל $\epsilon > 0$ יש קטע $I_{\frac{1}{2}}^*$ כך ש- $|f(x) - 2| < \epsilon$ לכל $x \in I_{\frac{1}{2}}^*$.

$$\begin{aligned} \text{(כלומר, לכל } x \in I_a^* \text{ או } (|2x - 1| < \epsilon)^{\frac{1}{2}}, \\ \left(\frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2} < x < \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2}, \quad \left| x - \frac{1}{2} \right| < \frac{\epsilon}{2} \right) \end{aligned}$$

לכן בנתן $\epsilon > 0$ נבחר $I_{\frac{1}{2}}^* = \left(\frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2} \right) = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

אז לכל $x \in I_a^*$ מתקיים $|f(x) - 2| < \epsilon$
ולכן לפי הגדרת הגבול $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = 2$.

שיעור 4-ב (12.11.09)

הגדרה: אם f מוגדרת בקטע פתוח שמכיל את a למעט אולי a אז $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ אם לכל $\epsilon > 0$ קיים קטע פתוח נקוב I_a^* כך ש- $|f(x) - L| < \epsilon$ לכל $x \in I_a^*$.

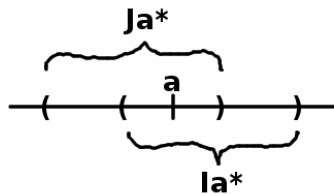
יחידות הגבול

משפט: אם יש לפונקציה גבול בנקודה a אז הגבול הוא יחיד.

הוכחה: נניח ש- f מוגדרת בקטע פתוח המכיל את a (פרט אולי ל- a). ונניח ש- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ וגם $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$.

לפי הגדרת הגבול, אם נבחר $\epsilon > 0$, קיים קטע נקוב I_a^* כך ש- $|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$ לכל $x \in I_a^*$.

לפי אותה ההגדרה, סביב אותה ϵ , קיים גם קטע נקוב J_a^* שבו $|f(x) - L_1| < \frac{\epsilon}{2}$ לכל $x \in J_a^*$.



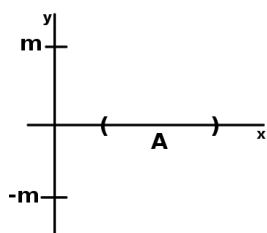
אם $J_a^* \cap I_a^* \neq \emptyset$ אז גם זה קטע פתוח נקוב סביב a .

לכן קיים $x \in J_a^* \cap I_a^*$ עבור x זה נקבל $|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$ וגם $|f(x) - L_1| < \frac{\epsilon}{2}$ אז

$$|L - L_1| = |(L - f(x)) + (f(x) - L_1)| \leq \underbrace{|L - f(x)|}_{< \frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{|f(x) - L_1|}_{< \frac{\epsilon}{2}} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

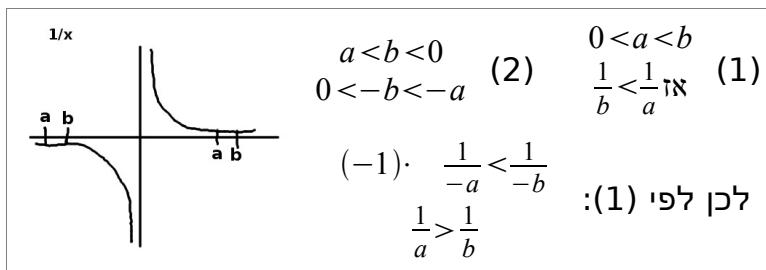
אי שיוון המשולש

כך הוכחנו שלכל $\epsilon > 0$ מתקיים ש- $|L - L_1| < \epsilon$ לכל $|L - L_1|$ הוא מספר אי-שלילי שקטן מכל מספר חיובי אפשרי. המספר היחיד בעל תכונה זו הוא 0, לכן $|L - L_1| = 0$ ולכן $L = L_1$.

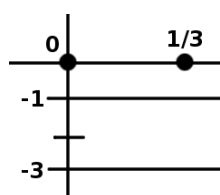


הגדרה: פונקציה f נקראת **חסומה** על קבוצה A אם קיים $M > 0$ כך ש- $|f(x)| < M$ לכל $x \in A$.

דוגמה: $f(x) = \frac{1}{2x-1}$ בקטע $[0, \frac{1}{3}]$ מתקיים



$$\begin{aligned}
 0 &\leq x \leq \frac{1}{3} \\
 0 &\leq 2x \leq \frac{2}{3} \\
 -1 &\leq 2x - 1 \leq -\frac{1}{3} \\
 -3 &\leq \frac{1}{2x-1} \leq -1
 \end{aligned}$$



לכן $x \in [0, \frac{1}{3}]$ $-3 \leq f(x) \leq -1$ כלומר $|f(x)| \leq 3$ ולכן $|f(x)| < 4$ לכל $x \in [0, \frac{1}{3}]$ לכן f **חסומה** בקטע.

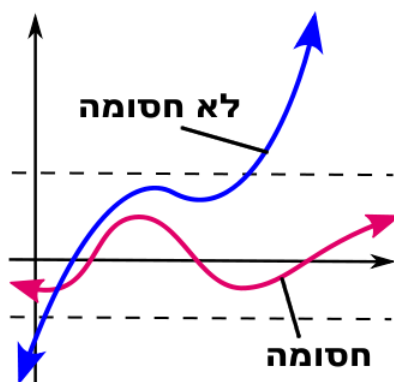
נוכיח ש- f **לא חסומה** בקטע $(0, \frac{1}{2})$.
 נניח שקיים $M > 0$ כך ש- $|f(x)| < M$ לכל $x \in (0, \frac{1}{2})$

אבל נבחר $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2M}$ (זה בקטע כי $M > 1$)

[[איך? נבודד x בביטוי $M = \left| \frac{1}{2x-1} \right|$ ונראה אם x בקטע. נראה למה זה טוב]]

אפשר להניח ש- $M > 1$ אחרת נחליף אותו ב- $M+1$ ועדיין $\otimes$ יהיה נכון.

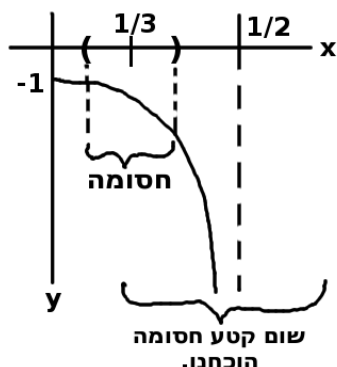
אז $x \in (0, \frac{1}{2})$ מתקיים $|f(x)| = \left| \frac{1}{2(\frac{1}{2} - \frac{1}{2M}) - 1} \right| = M$
 סתירה להנחה ש- $|f(x)| < M$ לכל $x \in (0, \frac{1}{2})$



משפט: אם ל- f יש גבול בנקודה a אז קיים קטע פתוח נקוב סביב a שבו f חסומה.

הוכחה:

נניח ש- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$



לפי הגדרת הגבול עבור $\epsilon = 1$ קיים קטע I_a^* כך ש- $|f(x) - L| < 1$ לכל $x \in I_a^*$.

לכן $-1 < f(x) - L < 1$

כלומר $L - 1 < f(x) < L + 1$ לכל $x \in I_a^*$

נסמן $M = \max(L - 1, L + 1)$

אז לכל $x \in I_a^*$ מתקיים $-M \leq L - 1 < f(x) < L + 1 \leq M$

לכן $|f(x)| < M$ לכל $x \in I_a^*$ ולכן f חסומה.

דוגמה: $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1}{2x-1}$ לא קיים כי הפונקציה לא חסומה בשום קטע פתוח שמכיל את $\frac{1}{2}$.

משפט:

אם $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L > 0$

אז קיים קטע נקוב I_a^* כך ש- $f(x) > \frac{L}{2}$ לכל $x \in I_a^*$

(ולפי כך, אם הגבול של פונקציה בנקודה a הוא חיובי אז קיים קטע נקוב סביב הנקודה שבו הפונקציה חיובית).

הוכחה:

נניח ש- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L > 0$

אז לפי הגדרת הגבול עבור $\epsilon = \frac{L}{2} > 0$

קיים קטע נקוב I_a^* כך ש- $|f(x) - L| \leq \frac{L}{2} (= \epsilon)$ לכל $x \in I_a^*$.

$$\begin{aligned} &+L \setminus -\frac{L}{2} < f(x) - L < \frac{L}{2} \\ &\text{אז} \quad x \in I_a^* \quad \underbrace{\frac{L}{2} < f(x) < \frac{3L}{2}} \end{aligned}$$

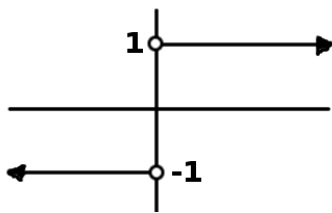
משפט: אם $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L < 0$

אז קיים קטע פתוח נקוב סביב a שבו $f(x) < \frac{L}{2}$ לכל x בקטע.

הוכחה דומה (שבו $\epsilon = -\frac{L}{2} > 0$)

הערה: אם f חסומה בקטע פתוח נקוב סביב a , לא מובטח שיש ל- f גבול באותה נקודה.

דוגמה: $f(x) = \frac{x}{|x|}$ מוגדרת לכל $x \neq 0$



לכל $x \neq 0$ מתקיים $|f(x)| = \left| \frac{x}{|x|} \right| = \frac{|x|}{|x|} = 1$
 לכן $|f(x)| < 2$ לכל $x \neq 0$ ולכן חסומה.
 בפרט f חסומה בכל קטע פתוח שמכיל את x .

האם קיים $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$?

נניח שקיים L כך ש- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$.

אז לכל $\epsilon > 0$ קיים קטע I_0^* כך ש- $|f(x) - L| < \epsilon$ לכל $x \in I_0^*$

למשל עבור $\epsilon = \frac{1}{2}$ נקבל קטע שקיים I_0^* כך ש- $|f(x) - L| < \frac{1}{2}$ לכל $x \in I_0^*$

ב- I_0^* (שהוא קטע פתוח נקוב המכיל את 0) יש נקודה $x_1 > 0$ ונקודה $x_2 < 0$

אז $|f(x_1) - L| < \frac{1}{2}$ וגם $|f(x_2) - L| < \frac{1}{2}$.

כלומר $|1 - L| < \frac{1}{2}$ ו- $|-1 - L| < \frac{1}{2}$ (זה כמו $|L + 1| < \frac{1}{2}$)

$$-\frac{1}{2} < 1 - L < \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} < 1 + L < \frac{1}{2}$$

$$2 < 1 \text{ סתירה}$$

לכן לא קיים L כך ש- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$.

שיעור 5-א (17.11.09)

הערה: לפי הגדרת הגבול $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ פירושו

שלכל $\epsilon > 0$ קיים קטע נקוב I_a^* כך ש- $|f(x)| < \epsilon$ לכל $x \in I_a^*$ (זה כמו $|f(x) - 0| < \epsilon$)

לכן, מפני ש- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ שקול לפי ההגדרה לכך שלכל $\epsilon > 0$ קיים קטע I_a^* כך ש- $\underbrace{|f(x) - L|}_g < \epsilon$ לכל $x \in I_a^*$

נקבל מ- $\otimes$ ש- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - L = 0$ ולהפך.

מסקנה: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ אם"ם $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = 0$

גבולות וערכים מוחלטים

משפט: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ אם"ם $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$

הוכחה: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ אם"ם לכל $\epsilon > 0$ קיים קטע נקוב I_a^* כך ש- $|f(x) - 0| < \epsilon$ לכל $x \in I_a^*$ וזה שקול ל- $|f(x)| < \epsilon$ לכל $x \in I_a^*$.
כלומר לכך ש- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

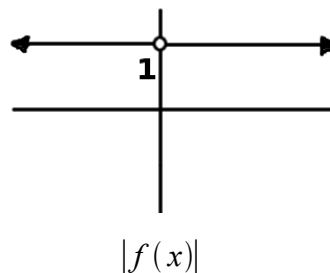
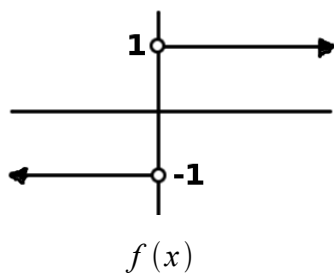
תרגיל: להוכיח שאם $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ אז $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L|$.
רמז: $|a| - |b| \leq |a - b|$, אי-שייון המשולש.

הערה: אם $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = L$ לא מובטח קיום של $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

דוגמה: $f(x) = \frac{x}{|x|}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{x}{|x|} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

אבל $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ לא קיים.



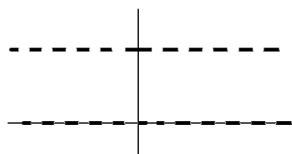
פונקציות חסומות והשיבי גבולות

הוכחנו שאם $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = L$ אז קיים קטע I_a^* שבו f חסומה.
 (קיים $M > 0$ כך ש- $|f(x)| < M$ לכל $x \in I_a^*$).

אם $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ חסומה בקטע נקוב המכיל את הנקודה a לא מובטח שקיים

דוגמה 1: $f(x) = \frac{x}{|x|}$ חסומה בכל תחום ההגדרה (כי $|f(x)| = 1$ לכל $x \neq 0$)

ובפרט היא חסומה בסביבת $x=0$ אבל $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ לא קיים.



דוגמה 2: (Dirichlet function) $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

אז D חסומה בכל הישר ($|D(x)| < 2$ לכל $x \in \mathbb{R}$)

תרגיל: להוכיח ש- $\lim_{x \rightarrow a} D(x)$ (עבור כל נקודה a) לא קיים.

פתרון: נניח שקיים נקודה a שבה קיים $\lim_{x \rightarrow a} D(x)$ והוא L. אז מהגדרת הגבול נקבל שלמשל עבור $\epsilon = 2$ קיים קטע נקוב I_a^* כך ש- $|D(x) - L| < \frac{1}{2}$ לכל $x \in I_a^*$

מאחר שבקטע I_a^* קיימות נקודה רציונלית x_1 ונקודה אי רציונלית x_2

$$\text{נקבל } \overbrace{|D(x_1) - L|}^0 < \frac{1}{2} \text{ ו- } \overbrace{|D(x_2) - L|}^1 < \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \leq L \leq \frac{1}{2} & \quad |0 - L| < \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \leq 1 - L \leq \frac{1}{2} & \quad \Leftrightarrow |1 - L| < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

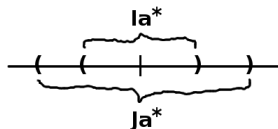
מכאן ש- $L + 1 - L < 1$ (1 < 1) - סתירה.

לכן ההנחה שקיים $\lim_{x \rightarrow a} D(x) = L$ שגויה

ולכן **לפונקציה $D(x)$ אין גבול באף נקודה.**

משפט: נניח ש- f חסומה בסביבת a ו- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ אז $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = 0$

הוכחה: לפי הנתון f חסומה לכן קיים קטע J_a^* כך ש- $|f(x)| < M$ לכל $x \in J_a^*$ כאשר m חיובי קבוע.



כמוכן, נתון ש- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

(צ"ל שלכל $\epsilon > 0$ קיים קטע נקוב I_a^* כך ש- $|f(x) \cdot g(x)| < \epsilon$ לכל $x \in I_a^*$)

$$\left(\underbrace{|f(x)|}_{< M} \cdot \underbrace{|g(x)|}_{M \cdot \epsilon(?)} \right)$$

לכן לכל $\epsilon > 0$, קיים קטע נקוב I_a^* כך ש- $|g(x) - 0| < \frac{\epsilon}{M}$ לכל $x \in I_a^*$.

לכן עבור אותה $\epsilon > 0$ שבחרנו, נקבל שלכל x השייך לקטע הנקוב $I_a^* \cup J_a^*$

$$|f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| < M \cdot \frac{\epsilon}{M} = \epsilon$$

מאחר שלכל $\epsilon > 0$ ניתן למצוא קטע נקוב שבו $|f(x) \cdot g(x)| < \epsilon$ לכל x בקטע,

נובע ש- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = 0$

$${}_x D(x) = \begin{cases} x & x \in Q \\ 0 & x \notin Q \end{cases} \quad \text{שימושיות:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{x}_{\text{שואפת ל-0}} \underbrace{D(x)}_{\text{חוסמה}} = \underbrace{0}_{\text{לפי משפט הקודם}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{x}_{\text{שואפת ל-0}} \underbrace{\sin \frac{1}{x}}_x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (-f(x)) = -L \quad \text{אם} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{טענה:}$$

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \text{אם} \quad |-f(x) - (-L)| < \epsilon \quad \text{הוכחה:}$$

אלה שווים

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= L & \text{הוכחה} \\ \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) &= 0 & \text{אם} \\ \lim_{x \rightarrow a} |f(x) - L| &= 0 & \text{אם} \end{aligned} \quad \text{אחרת:}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (-f(x)) &= -L & \text{מצב שני} \\ \lim_{x \rightarrow a} (-f(x) + L) &= 0 & \text{אם} \\ \lim_{x \rightarrow a} |-f(x) + L| &= 0 & \text{אם} \end{aligned} \quad \text{אבל}$$

$$|-f(x) + L| = |f(x) - L| \quad \text{אבל}$$

לכן $\otimes$ ו- $\otimes \otimes$ שקולים.

כללי חשבון לגבולות

1. כלל החיבור

הגדרה: נניח ש- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ו- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = K$ אז, $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = K + L$

(רק עם הם קיימים, אחרת אין גבול. צריכים לבדוק קודם)

הוכחה: צ"ל שלכל $\epsilon > 0$ קיים קטע נקוב I_a^* כך ש- $|f(x) + g(x) - (K + L)| < \epsilon$ לכל $x \in I_a^*$

נבחר $\epsilon > 0$. לפי הנתון $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

לכן עבור אותו ϵ שבחרנו, קיים קטע נקוב $I_{a,1}^*$

כך ש- $|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$ לכל $x \in I_{a,1}^*$.

באופן דומה, מאחר ש- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = K$,

נקבל שעבור אותו ϵ שבחרנו, קיים קטע נקוב $I_{a,2}^*$

כך ש- $|f(x) - K| < \frac{\epsilon}{2}$ לכל $x \in I_{a,2}^*$

נסמן $I_a^* = I_{a,1}^* \cap I_{a,2}^*$ (זה קטע נקוב סביב a) לכל $x \in I_a^*$ מתקיים

$$|f(x) + g(x) - K - L| = |(f(x) - L) + (g(x) - K)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - K| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

אי שוויון המשולש

הערה חשובה: אם קיים $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ לא מובטח שקיים $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ו- $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

דוגמה: אם נבחר למשל $f(x) = D(x)$, $g(x) = -D(x)$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} 0 = 0 \quad \text{אז}$$

פונקציה קבוע

אבל ל- f ו- g אין גבול בעף נקודה a .

2. גבול של פונקציה קבוע

הגדרה: אם f קבוע בקטע פתוח נקוב סביב a , I_a^* , כלומר $f(x)=c$ לכל $x \in I_a^*$, אז $\lim_{x \rightarrow a} f(x)=c$

הוכחה: לכל $\epsilon > 0$ לכל $x \in I_a^*$ לכן $\lim_{x \rightarrow a} f(x)=L$ $\left| f(x) - L \right| = |c - L| = 0 < \epsilon$

3. כלל החיסור

הגדרה: אם $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = 0$ ו- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ אז גם $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$

הוכחה: לפי ההנחה $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = 0$
 לכן לפי משפט קודם גם $\lim_{x \rightarrow a} (g(x) - f(x)) = 0$
 לכן $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\underbrace{f(x)}_L + \underbrace{(g(x) - f(x))}_0 \right) \stackrel{\text{כלל החיבור}}{=} L + 0 = L$

■

הוכחה דומה במקרה ש- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = 0$ ו- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$

4. כלל המכפלה

הגדרה: אם $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ו- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = K$ אז $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = K \cdot L$

הוכחה: מפני ש- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ קיים, נובע שיש קטע I_a^* שבו f חסומה.

כמו כן $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = 0$ ו- $\lim_{x \rightarrow a} (g(x) - K) = 0$
 לכן $f(x) \cdot g(x) - KL = f(x)(g(x) - K) + K f(x) - KL$
 $= \underbrace{f(x)}_{\text{חסומה ב- } I_a^*} \underbrace{(g(x) - K)}_{\text{שואפת ל-0}} + \underbrace{K}_{\text{חסומה}} \underbrace{(f(x) - L)}_{\text{שואפת ל-0}} \stackrel{\text{לפי כלל החיבור}}{=} 0$
 כולו שואף ל-0

מאחר ש- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x) - K \cdot L) = 0$ נובע ש- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) g(x) = KL$

שיעור 5-ב (19.11.09)

כללי חשבון לגבולות - המשך

4. כלל המנה

הגדרה: אם $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = K$ ו- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \neq 0$ אז $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{K}{L}$

למה: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L}$

הוכחה: נשים לב שאם $L > 0$ אז לפי משפט קודם קיים קטע I_a^*

כך ש- $g(x) < \frac{2}{L}$ לכל $x \in I_a^*$.

אז $\otimes \quad 0 < \frac{1}{g(x)} < \frac{2}{L}$ לכל $x \in I_a^*$.

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L} = \frac{L - g(x)}{L \cdot g(x)} = \underbrace{\left(\frac{L - g(x)}{L} \right)}_{\text{שואף ל-0}} \cdot \underbrace{\frac{1}{L \cdot g(x)}}_{\text{חסומה ב- } I_a^* \text{ לפי } \otimes} \quad \text{אז}$$

לכן $\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L}$ היא מכפלה של פונקציה חסומה ב- I_a^*

ושל פונקציה השואפת ל-0 ולכן לפי משפט שהוכחנו:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L} \quad \text{ולכן} \quad \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L} \right) = 0$$

אם $L < 0$ אז $\underbrace{-g(x)}_{x \rightarrow a} \rightarrow -L > 0$

לכן לפי ההוכחה הקודמת $\lim_{x \rightarrow a} \frac{-1}{g(x)} = -\frac{1}{L}$

ולפי כלל המכפלה נקבל (לאחר כפר הפונקציה $h(x) = -1$)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L}$$

לבסוף, אם $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = K$ ו- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \neq 0$ אז $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{K}{L}$

המשך בדף הבא...

ואז, לפי כלל המכפלה:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\underbrace{f(x)}_K \cdot \underbrace{\frac{1}{g(x)}}_{\frac{1}{L}} \right) = K \cdot \frac{1}{L} = \frac{K}{L}$$

מסקנה: $\lim_{x \rightarrow a} x^n = (\lim_{x \rightarrow a} x)^n = a^n$ n טבעי

(שימוש בכלל המכפלה הרבה פעמים)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^3 - 7x^2 + 8x + 2}{14x^5 - 3x + 1} = \frac{5 \cdot 2^3 - 7 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 + 2}{14 \cdot 2^5 - 3 \cdot 2 + 1}$$

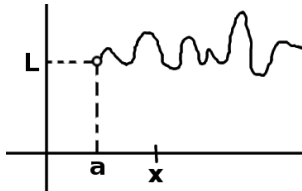
שימוש חוזר בכללי החשבון

גבולות חד צדדיים

הגדרה: נניח ש- f מוגדרת בקטע פתוח $(a, a+\delta)$ ($\delta > 0$).

נאמר ש- L הוא גבול מימין של f בנקודה a ונסמן $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ אם

לכל $\epsilon > 0$ קיים קטע (a, c) כך ש- $|f(x) - L| < \epsilon$ לכל $x \in (a, c)$ ($<$ תלוי ב- ϵ)



הערה פירוש הסימון $x \rightarrow a^+$ הוא $x \rightarrow a$ ו- $x > a$.

חשובה א: (אבל אין שום מספר שמסומן ב- a^+)

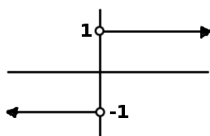
הגדרה: נניח ש- f מוגדרת בקטע $(a-\delta, a)$ ($\delta > 0$) (אומר ש- K הוא **הגבול**

החד-צדדי השמאלי של f ב- a . אם לכל $\epsilon > 0$ קיים קטע (c, a)

כך ש- $|f(x) - K| < \epsilon$ לכל $x \in (c, a)$ ($<$ תלוי ב- ϵ)

משפט: נניח ש- f מוגדרת בקטע נקוב המכיל את a .

אז $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ אם ורק אם $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ ו- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ (להוכיח לבד)



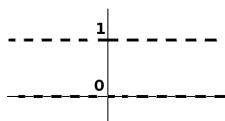
דוגמה 1: אם $f(x) = \frac{x}{|x|}$ ו- $x > 0$ לכן $|x| = x$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1 \quad \text{אז}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1 \quad \text{אבל}$$

לכן $|x| = -x$

לכן קיימים קבולות חד צדדים ב-0 אבל $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ לא קיים כי גבולות החד צדדים לא שווים.



דוגמה 2: אם $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ (Dirichlet function)

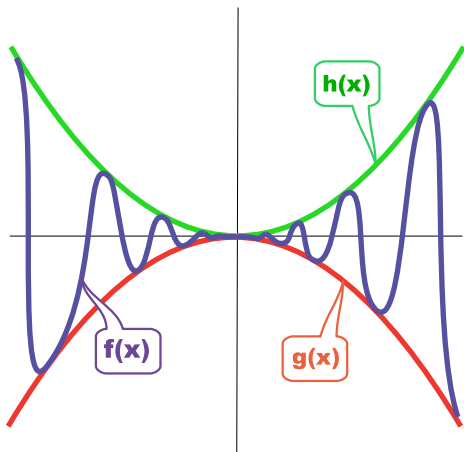
$\lim_{x \rightarrow 0^+} D(x)$ לא קיים וגם $\lim_{x \rightarrow 0^-} D(x)$ לא קיים

דוגמה 3: $\lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{x}_{\text{חסום}} \cdot \underbrace{D(x)}_{\text{חסום}} = 0$ (אין שום סיבה להשתמש בגבולות חד צדדים להוכיח זאת)

משפט הסנדוויץ' (Squeeze Theorem)

http://en.wikipedia.org/wiki/Squeeze_theorem

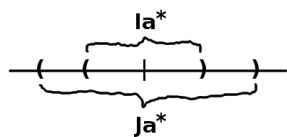
[משפט_הסנדוויץ' http://he.wikipedia.org/wiki/](http://he.wikipedia.org/wiki/משפט_הסנדוויץ)



משפט: נניח ש- f, g, h מוגדרת בקטע J_a^*
 ו- $x \in J_a^*$ לכל $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$
 כמובן נניח ש- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$
 אז $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

הוכחה: לפי הנתון $\lim_{x \rightarrow a} (h(x) - g(x)) = L - L = 0$ (לפי כלל החיבור והכפל)

לכן לכל $\epsilon > 0$ קיים קטע I_a^* כך ש- $|f(x) - g(x)| < \epsilon$ לכל $x \in I_a^*$.



לכל $x \in J_a^*$ מתקיים (לפי הנתון) $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$
 כלומר $|f(x) - g(x)| \leq |h(x) - g(x)|$

לכן עבור אותו ϵ מקודם מתקיים (משהו?) $\rightarrow$ משהו יודע מה היה פה?

מצאנו קטע I_a^* ש- $|f(x) - g(x)| < \epsilon$ לכל $x \in I_a^*$.

(ולא $\epsilon > 0$ אפשר למצוא קטע מתאים)

לכן לפי הגדרת הגבול נובע ש- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - g(x) = 0$

לפי משפט קודם ("כלל החיסור")

מאחר ש- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ נקבל שגם $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

■

הערה: משפט הסנדוויץ' נכון גם לגבולות חד צדדיים.
(אותה הוכחה אבל מגבילים את x מימין ומשמאל ל- a)

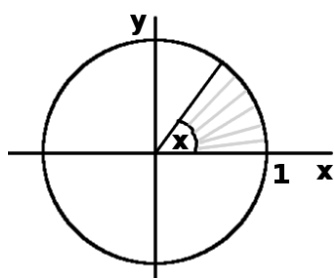
דוגמה: $\lim_{x \rightarrow a} x \sin \frac{1}{x} = 0$

הוכחה:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 \leq \underbrace{\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right|}_{\substack{\text{לפי כלל הסנדוויץ'} \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x)}} \leq \underbrace{|x|}_{\lim_{x \rightarrow 0} h(x)}$$

מאחר ש- $\lim_{x \rightarrow 0} (x \sin \frac{1}{x}) = 0$ נקבל שגם $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

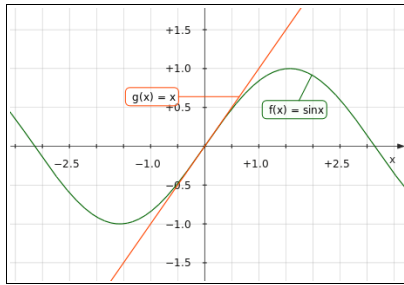
שאלה: נתונה זווית x במעגל הטריגונומטרי:
מהו שטח הגזרה שמתאימה לזווית זו?



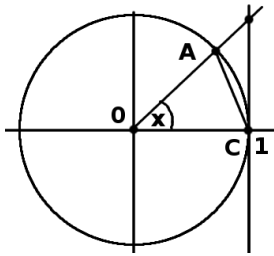
שטח $x \leftrightarrow 2\pi$ (זווית)
 $1 \leftrightarrow \frac{1}{2}$ (זווית)
 $x \leftrightarrow \frac{x}{2}$ (זווית)

שיעור 6-א (24.11.09)

גבולות של פונקציות טריגונומטריות



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{משפט:}$$



הוכחה:

נבחר זווית $0 < x < \frac{\pi}{2}$ כמו בציור

$$D_{OAC} < OAC < S_{OBC} \quad \text{אז}$$

$$\frac{\overbrace{\sin x}^{\text{גובה המשולש OAC}}}{2} < \frac{\overbrace{x}^{\text{שטח גזרה שמתאימה לזווית x}}}{2} < \frac{\overbrace{1 \cdot \tan x}^{\text{גובה המשולש OBC}}}{2}$$

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{לכן} \quad \sin x > 0 \quad \text{נחלק ב-}$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

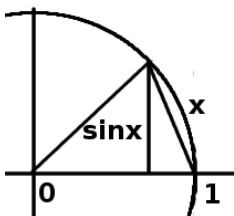
$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \text{לכן} \quad \text{איסוף שברים}$$

זוה נכון לכל $x > 0$.

נשאיף את x ל-0 ($x > 0$) ונקבל לפי משפט הסנוויץ (החד צדדי):

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\circledast \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{\substack{0 < x = t \\ t \rightarrow 0^-}} \frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{\substack{-t \rightarrow 0^+ \\ t > 0}} \frac{\sin t}{t} = 1 \quad \text{כמו-כן}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 \quad \text{טענה:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{הוכחנו שעזר}$$

הוכחה:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \lim_{x \neq 0} \underbrace{\left(\frac{\sin x}{x} \right)}_{\rightarrow 1} \underbrace{x}_{\rightarrow 0} = 0 \quad \text{לכן}$$

לפי כלל המכילה L

משפט: לכל $a \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$

הוכחה: $\sin x - \sin a = 2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$
כאשר $\frac{x-a}{2} \rightarrow 0$ ו- $\frac{x+a}{2}$ חסום

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin \frac{x-a}{2} = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ x \rightarrow a \text{ סדור } a}} \sin t = 0$$

לכן $\lim_{x \rightarrow a} (\sin x - \sin a) = 0$ ל' קבוע

מאחר ש- $\lim_{x \rightarrow a} \sin a = \sin a$ פונקציה קבוע

לכן לפי כלל ההפרש $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$

דוגמה:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\sin 3x}^{\rightarrow 1}}{\underbrace{\sin 7x}_{\rightarrow 1}} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{7}$$

משפט: לכל $a \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$

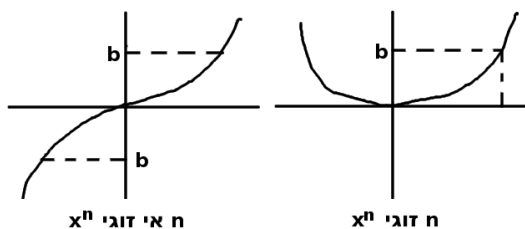
הוכחה: $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \lim_{x \rightarrow a} \sin(\frac{\pi}{2} - x) \stackrel{\text{נסמן } t = \frac{\pi}{2} - x}{=} \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2} - a} \sin t \stackrel{\text{לפי משפט אחרון}}{=} \sin(\frac{\pi}{2} - a) = \cos a$

דוגמה: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - 2\sin^2 \frac{x}{2})}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\underbrace{\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}_{\rightarrow 1} \right)^2 = \frac{1}{2}$

$\cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x \Leftrightarrow \cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$

או דרך אחרת:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x(1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\underbrace{x^2}_{\rightarrow 1} \underbrace{(1 - \cos x)}_{\rightarrow 2}} = \frac{1}{2}$$



משפט: לכל n טבעי $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[n]{x} = 0$

הוכחה:

נניח ש- $\epsilon > 0$

רוצים ש- $0 < x < \epsilon^n \Leftrightarrow 0 < \sqrt[n]{x} < \epsilon$

נבחר את הקטע $(0, \epsilon^n)$

אז לכל $x \in (0, \epsilon^n)$ מתקיים $0 < x < \epsilon^n$ כלומר $0 < \sqrt[n]{x} < \epsilon$ ולכן

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[n]{x} = 0$ לכל $x \in (0, \epsilon^n)$ ולכן לפי הגדרת הגבול בימין נקבל

מסקנה: אם n אי זוגי אז $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{x} = 0$

הוכחה:

הוכחנו במשפט הקודם ש- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[n]{x} = 0$

כמוכן, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[n]{x} = 0$ נסמן $t = -x$, $x = -t$ נקבל $\lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt[n]{-t} = 0$ $\lim_{t \rightarrow 0^+} -(\sqrt[n]{t}) = 0$ $\lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt[n]{t} = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[n]{x} = 0$

טענה: לכל n טבעי $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[n]{x} = 1$

הוכחה:

נניח $x \geq 1$ אז $\sqrt[n]{x} > 1$

(כי אם $\sqrt[n]{x} \leq 1$ אז גם $(\sqrt[n]{x})^n \leq 1$ כלומר $x \leq 1$ - סתירה).

נסמן $t = \sqrt[n]{x} - 1$ (נוכיח ש- $\lim_{x \rightarrow 1^+} t = 0$)

אז $\sqrt[n]{x} = t + 1$ (כי $\sqrt[n]{x} > 1$) $t > 0$

לכן $1 + t^n < (1 + t)^n = x$

ולכן $0 < t^n < x - 1$

לכן לפי כלל הסנדוויץ' נקבל $\lim_{t \rightarrow 1} t^n = 0$

ראינו קודם שם $y \rightarrow 0$ אז גם $\sqrt[n]{y} \rightarrow 0$ לכן $\sqrt[n]{t} \rightarrow 0$ כלומר $t \rightarrow 0$

ומאחר ש- $\lim_{x \rightarrow 1^+} t = 0$ נובע ש- $\lim_{x \rightarrow 1^+} (\sqrt[n]{x} - 1) = 0$

ולכן לפי כלל ההפרש: $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt[n]{x} = 1$

המשך בדף הבא

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt[n]{x} \stackrel{\substack{\text{נסמן } t = \frac{1}{x} \\ \text{אז } t > 1 \text{ כי } x < 1}}{=} \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[n]{1}}{t} = \lim_{t \rightarrow 1^+} \underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{t}}}_{\substack{\text{כלל המנה} \\ \text{שואף ל-0 לפי חלק הראשון}}} = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{כמו-כן}$$

משפט: לכל $a \neq 0$ שעבורו $\sqrt[n]{a}$ מוגדר מתקיים $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} \stackrel{\substack{\text{נסמן } t = \frac{x}{a} \text{ אז } t \rightarrow 1}}{=} \lim_{t \rightarrow 1} \sqrt[n]{at} = \lim_{t \rightarrow 1} \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{t}}_{\substack{\rightarrow \sqrt[n]{a} \rightarrow 1 \\ \text{מותר כי } \sqrt[n]{a} \text{ ו-}\sqrt[n]{t} \text{ מוגדרים}}} = \sqrt[n]{a} \quad \text{הוכחה:}$$

שיעור 6-ב (26.11.09)

רציפות



פונקציות לא רציפות

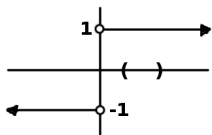
רציפות של פונקציה בנקודה

הגדרה:

פונקציה f היא רציפה בנקודה a אם f מוגדרת בקטע הפתוח המכיל את a (כולל a) ומתקיים $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ (הגבול של f ב- a קיים ושווה ל- $f(a)$)

דוגמאות:

1. $f(x) = \frac{x}{|x|}$ לא רציפה ב- $x=0$ כי היא לא מוגדרת ב-0.



2. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ ב- $x=0$ היא מוגדרת אבל $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ לא קיים ולכן f לא רציפה ב-0.

f רציפה בכל נקודה $x \neq 0$ כי לכל נקודה הזו קיים קטע פתוח שבו f קבוע.

3. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ מוגדרת ב-0 (ובכל הישר)

$f(0) = 0$ (קיים)

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\sin x}{x} = 1$$

לכן $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$ ולכן f לא רציפה.

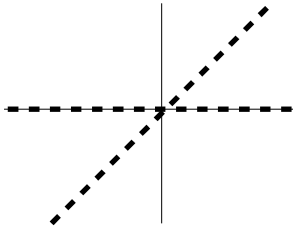
4. $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = g(0)$$

ולכן g רציפה ב-0.

שאלה: $f(x) = x \cdot D(x)$ (D פינקציה דיריכלה)

באלו נקודות רציפה הפונקציה הנ"ל?



$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \underbrace{D(x)}_{\text{חסום}} = 0 = f(0) \quad \text{ולכן } f \text{ רציפה ב-} 0.$$

תשובה:

אם נניח שקיים $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ עבור $a \neq 0$

נקבל שגם $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ קיים באותה נקודה (לפי כלל המנה)

כלומר קיים $\lim_{x \rightarrow a} D(x)$ - סתירה.

לכן f רציפה ב-0 ולא רציפה בשום נקודה אחרת.

משפט: כללי החשבון לפונקציות רציפות בנקודה.

נניח ש- f, g רציפות בנקודה a , אז:

1. $f+g$ רציפה ב- a
2. $f \cdot g$ רציפה ב- a .
3. $\frac{f}{g}$ רציפה ב- a בתנאי ש- $g(a) \neq 0$

הוכחה 3: לפי הנתון $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a) \neq 0$$

מאחר ש- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a) \neq 0$ מותר להשתמש בכלל המנה ונקבל ש:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f}{g}(a)$$

כלל המנה

לכן $\frac{f}{g}$ רציפה ב- a .

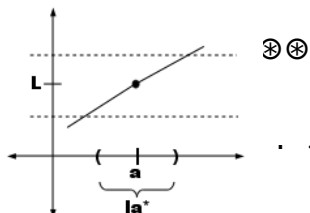
הערה: אם f רציפה ב- a אז $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} x\right)$

משפט: נניח ש- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ ונניח ש- f רציפה בנקודה L

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = \underbrace{f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right)}_{\text{צ"ל}} = f(L) \quad \text{אז}$$

הוכחה: לפי ההנחה, f רציפה ב- L ולכן $\lim_{y \rightarrow L} f(y) = L$

צ"ל שלכל $\epsilon > 0$ קיים I_a^* כך ש- $|f(g(x)) - f(L)| < \epsilon$ לכל $x \in I_a^*$



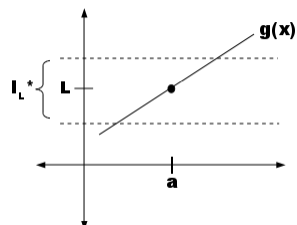
נבחר $\delta > 0$ מאחר ש- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$

נובע שקיים קטע I_a^* כך ש- $|g(x) - L| < \delta$ לכל $x \in I_a^*$.

מאחר ש- f רציפה ב- L

נובע שעבור $f(y)$ קרוב ל- L , $|f(y) - f(L)|$ קטן כרצוננו,

עבור $\epsilon > 0$ קיים קטע I_L^* כך ש- $|f(y) - f(L)| < \epsilon$ לכל $y \in I_L^*$.

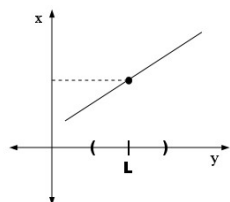


כמוכן, יודע ש- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$

לכן קיים קטע I_a^* כך שלכל $x \in I_a^*$ $g(x) \in I_L^*$

מאחר שהערכים של $g(x)$ הם חלק מתוך ערכי y השייכים ל- I_L^*

נקבל מ- $\otimes \otimes$ $|f(g(x)) - f(L)| < \epsilon$ (החלפנו את y ב- $g(x)$)



לכן $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(L)$

דוגמאות: $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{\frac{\sin x}{x}} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin x}{x}} = \sqrt[3]{1} = 1$

הוכחנו: $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ לכל n אי זוגי ולכל a .

מסקנה: אם g רציפה ב- a ו- f רציפה ב- $g(a)$ אז $f \circ g$ רציפה ב- a .

הוכחה: $\lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right) = f(g(a)) = (f \circ g)(a)$

לפי משפט הקודם מפני שקיים $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ רציפה לכן $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$

רציפות של פונקציה בקטע

הגדרה:

(1) נאמר שפונקציה f רציפה בקטע פתוח (a, b) אם f רציפה בכל נקודה בקטע פתוח $(\mathbb{R}, (-\infty, a), (a, \infty))$

(2) נאמר ש- f רציפה בקטע סגור $[a, b]$ אם f רציפה בכל נקודה בקטע פתוח (a, b) ובנוסף $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ (רציפות מימין ב- a) ו- $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$ (רציפות משמאל ב- b).

(3) באופן דומה מגדירים רציפות ב- $(-\infty, a]$, $[a, \infty)$ או בקטע חציפתות $[a, b), (a, b]$

משפט: כללי חשבון לפונקציות רציפות בקטע

נניח ש- f, g רציפות בקטע I . אז:

1. $f + g$ רציפה ב- I .
2. $f \cdot g$ רציפה ב- I .
3. $\frac{f}{g}$ רציפה בכל נקודה ב- I שבה $g(x) \neq 0$.

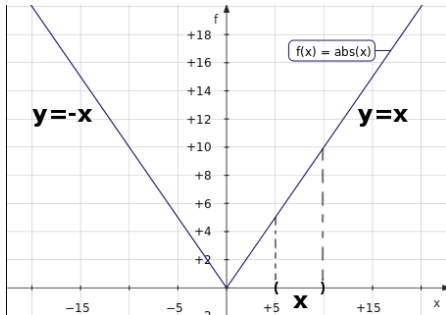
משפט: הרכבות פונקציות רציפות

אם f רציפה ב- I ו- g רציפה בכל נקודה $f(x)$ לכל $x \in I$ אז $g \circ f$ רציפה ב- I . (שימוש בכל נקודה $x \in I$ של המשפט הקודם).

1. כל פולינום הוא פונקציה רציפה ב- $\mathbb{R}$.
(הוא תוצאה של פעולות חיבור וכפל)
על $f(x)=x$ ועל פונקציות קבועות שהן רציפות ב- $\mathbb{R}$)
2. כל פונקציה רציונלית $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ (מנה של פולינומים)
רציפה בכל נקודה שהיא מוגדרת.
(ל- $Q(x)$ יש רק מספר סופי של נקודות שבהן הוא מתאפס)
3. $\sqrt[n]{x}$ עבור n זוגי רציפה ב- $[0, \infty)$
 $\sqrt[n]{x}$ עבור n אי זוגי רציפה ב- $(-\infty, \infty)$
4. $\sin x, \cos x$ רציפות ב- $\mathbb{R}$
5. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ רציפה ב- $(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi) \cup \frac{\pi}{2}(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$ $k \in \mathbb{Z}$
6. $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ רציפה ב- $\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

(כל הפונקציות האלו רציפות בתחום ההגדרה).

שיעור 7-א (1.12.09)



משפט: אם f רציפה בקטע I אז גם $|f|$ רציפה ב- I .

הוכחה: הפונקציה $g(x) = |x|$ היא רציפה ב- $\mathbb{R}$.

$$g(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

g מוגדרת בכל נקודה (לכל נקודה יש קטע פתוח שבו g מוגדרת)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \quad \text{ב- } x=0 :$$

לכן $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ (כי הגבולות החד צדדים קיימים ושווים ל-0)

מכאן ש- $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$ (כי $g(0) = 0$) ולכן g רציפה ב-0.

לכל $x \neq 0$: קיים קטע פתוח המכיל את x שבו $g(x) = x$ לכל x בקטע, או $g(x) = -x$ לכל x בקטע.

מאחר שהפונקציות $y=x$ ו- $y=-x$ הן רציפות בכל נקודה,

נקבל שגם $g(x)$ רציפה בכל נקודה $x \neq 0$.

לכן, g רציפה לכל x .

כעת נוכיח ש- $|f|$ רציפה ב- I .

מאחר ש- g רציפה ב- $\mathbb{R}$, לפי משפט קודם

$g \circ f$ רציפה בכל נקודה שבה f רציפה, כלומר, בכל נקודה ב- I .

(g, f : רציפה בכל נקודה x כך ש- f רציפה ב- x ו- g רציפה ב- $f(x)$)

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = |f(x)| \quad \text{אבל}$$

לכן $|f|$ רציפה ב- I .

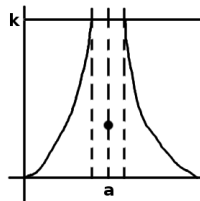
הערה: המשפט ההפוך לא נכונה.

אם $|f|$ רציפה ב- I לא מובטח שגם f רציפה בו.

דוגמה: $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ אז $|f|$ פונקציה קבוע ב- $\mathbb{R}$

ולכן רציפה בכל נקודה אבל f לא רציפה בשום נקודה.

הערה: $f(x) = \frac{x}{|x|}$ - רציפה בכל נקודה בתחום הגדרה ($\mathbb{R} \setminus \{0\}$)



גבולות אינסופיים

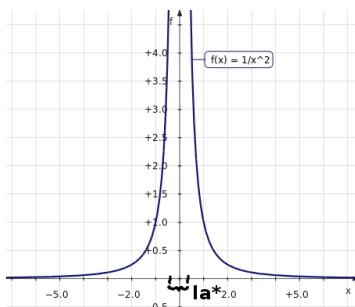
הגדרה:

1. נאומר ש- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

אם לכל $k > 0$ קיים קטע נקוב I_a^* כך ש- $f(x) > k$ לכל $x \in I_a^*$.

2. נאמר ש- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

אם לכל $k < 0$ קיים קטע נקוב I_a^* כך ש- $f(x) < k$ לכל $x \in I_a^*$.



דוגמה: $f(x) = \frac{1}{x^2}$

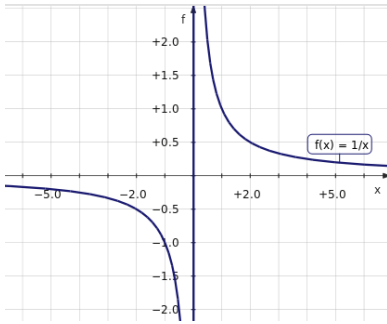
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty \text{ אז}$$

כי לכל $k > 0$ קיים קטע נקוב I_a^* כך ש- $f(x) > k$ לכל $x \in I_a^*$

$$\frac{-1}{\sqrt{k}} < x < \frac{1}{\sqrt{k}} \Leftrightarrow 0 \neq x^2 < \frac{1}{k} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} > k \Leftrightarrow f(x) > k \text{ רוצים}$$

אם נבחר את הקטע $I_0^* = \left(\frac{-1}{\sqrt{k}}, \frac{1}{\sqrt{k}} \right) \setminus \{0\}$

אז לכל $x \in I_0^*$ מתקיים $f(x) = \frac{1}{x^2} > k$ ולכן לפי ההגדרה $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.



$$f(x) = \frac{1}{x}$$

דוגמה:

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq \infty$ כדי להוכיח את זה,

צ"ל שקיים $k > 0$ שעבורו לכל קטע נקוב I_0^* קיים $x \in I_0^*$ כך ש- $f(x) \leq k$.

למשל, עבור $k=1$ לכל קטע נקוב I_0^* יש גם $x < 0$ אז $f(x) = \frac{1}{x} < 0$ ולכן הוכחנו (לפי שלילת הגדרת הגבול האינסופי) ש- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq \infty$.

באופן דומה, מתאים ש- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \neq -\infty$.

אם f לא חסומה בשום קטע נקוב המכיל את a ,

מסקנה:

לא מובטח ש- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ או $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

גבולות חד צדדיים אינסופיים

נאמר ש- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ אם

הגדרה:

לכל $k > 0$ קיים קטע $(a, a + \delta)$ כך ש- $f(x) > k$ לכל $x \in I$.

באופן דומה מגדירים $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

דוגמה:

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$ וגם $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ אם ורק אם $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

משפט:

משפט דומה נכון עבור $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

מסקנה: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ לא קיים (לא סופי ולא אינסופי)

כי (1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$ ו-(2) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

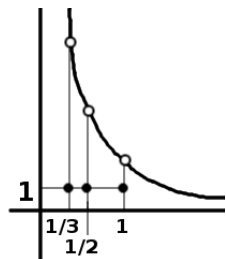
נהוג לרשום את (1) ו-(2) כך: $\frac{1}{0^+} = \infty$ $\frac{1}{0^-} = -\infty$

(הכתיבה $\frac{1}{0}$ היא עדיין חסרת משמעות).

שאלה: נניח ש- f מוגדרת בקטע $(a, a+\delta)$ ($\delta > 0$)
האם תמיד קיים $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ סופי או אינסופי?

תשובה: לא! למשל אם f פונקצית דיריכלה
אז ל- f אין גבול חד צדדי סופי או אין סופי באף נקודה.

שאלה: נניח ש- f חיובית, לא חסומה בשום קטע $(a, a+\delta)$ ($\delta > 0$)
(אבל מוגדרת מימין ל- a) האם $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$?



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq \frac{1}{n}, n \text{ טבעי} \\ 1 & x = \frac{1}{n}, n \text{ טבעי} \end{cases}$$

דוגמה:

אז f לא חסומה בשום קטע מהצורה $(0, 0+\delta)$ ($\delta > 0$)

אבל $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \infty$ כי למשל עבור $k=2$ לא קיים שום קטע מהצורה $(0, 0+\delta)$ ($\delta > 0$) שבו $f(x) > k$ (כי בכל קטע כזה יש נקודה שבה $f(x) = 1$)

הערה: אם f רציפה בקטע $(a, a+\delta)$ אז

1. ייתכן ש- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ קיים (סופי)
 2. ייתכן ש- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ או $-\infty$ (למשל $\frac{1}{x}$ בקטע $(0,1)$).
 3. ייתכן ש- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ לא קיים (לא סופי, ולא אינסופי). למשל: $f(x) = \sin \frac{1}{x}$
- רציפה ב- $(0,1)$ כהרכב של פונקציות רציפות אבל $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{1}{x}$ לא קיים).

משפט: (1) אם f מוגדרת וחיובית בקטע $(a, a+\delta)$, $\delta > 0$

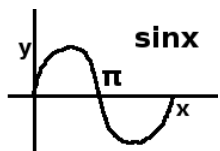
$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{f(x)} = 0 \quad \text{אז} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$$

(2) אם f מוגדרת ושליילית בקטע $(a, a+\delta)$, $\delta > 0$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{f(x)} = 0 \quad \text{אז} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$$

משפט דומה נכונה לגבולות חד צדדים משמאל.

$$\frac{1}{0^-} = -\infty, \quad \frac{1}{0^+} = \infty \quad \text{בקיזור:}$$



$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{1}{\sin x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{1}{\sin x} = \infty \quad \text{למשל,}$$

$$(\text{סתם: } \frac{1}{f(x)} \rightarrow \infty \text{ אומר ש- } \frac{1}{f(x)} > k > 0, \quad 0 < f(x) < \frac{1}{k})$$

תרגיל: לחשב $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-3x-2}{5x^2+7x+2}$

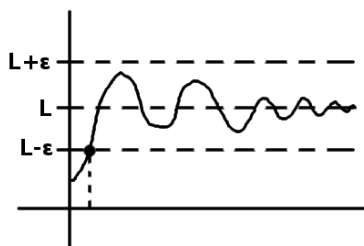
$$= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\overbrace{-3x-2}^{\rightarrow 1}}{\underbrace{(x+1)}_{\rightarrow 0} \underbrace{(5x+2)}_{\rightarrow -3}} = \frac{+1}{0^- \cdot (-3)} = +\infty$$

חיובי שואף ל-0

$$\frac{n}{f(x)} \quad \text{חיובית משמאל ל-} -1 \quad \text{ושואפת ל-} 0.$$

שיעור 7-ב (3.12.09)

גבולות ב- ∞ וב- $-\infty$



הגדרה:

1. בניח f -ש מוגדרת בקרן (a, ∞)
נאמר ש- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ (L מספר ממשי)

אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $M > 0$ כך ש- $|f(x) - L| < \epsilon$
לכל $x > M$ (גבול סופי ב- ∞)

2. בניח f -ש מוגדרת בקרן $(-\infty, a)$
נאמר ש- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$

אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $M < 0$ כך ש- $|f(x) - L| < \epsilon$
לכל $x < M$.

דוגמאות: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{|x|} = 0$$

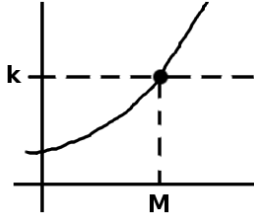
$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ לא קיים.

(אפשר להוכיח בדרך השלילה ע"י הנחת קיום גבול L ובחירת $\epsilon = \frac{1}{2}$)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \underbrace{\sin \frac{1}{x}}_{\rightarrow 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1}{t}}_{\frac{1}{x}=t} \cdot \sin t = 1$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ אמרנו בעבר ש- $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ לכן $x \rightarrow \infty$

גבולות אינסופיים ב- ∞ וב- $-\infty$



הגדרה:

1. נניח ש- f מוגדרת בקרן (a, ∞)

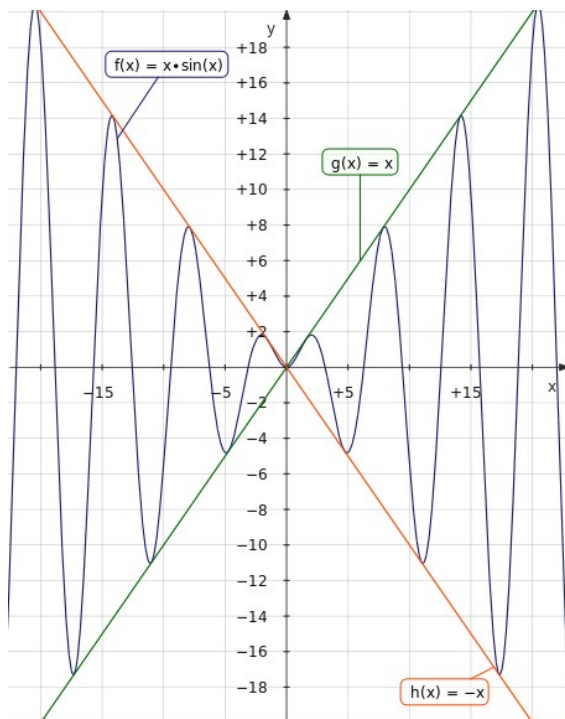
א. נאמר ש- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ אם לכל $k > 0$ קיים $M > 0$ כך ש- $f(x) > k$ לכל $x > M$.

ב. נאמר ש- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ אם לכל $k < 0$ קיים $M > 0$ כך ש- $f(x) < k$ לכל $x > M$.

2. נניח ש- f מוגדרת ב- $(-\infty, a)$

ולהגדיר לבד $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ ו- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

דוגמה לפונקציה לא חסומה שאין לה גבול אינסופי ב- ∞ או ב- $-\infty$



$$f(x) = x \cdot \sin x$$

$$f\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \text{ שלם.}$$

לכן f לא חסומה כי לכל M קיים k שלם כך ש- $\pi k + \frac{\pi}{2} > M$ או $\pi k + \frac{\pi}{2} < -M$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq \infty \quad \text{לכן}$$

כי לכל $k > 0$ לא קיים

$M > 0$ כך ש- $f(x) > k$ לכל $x > M$

(כי לכל $M > 0$ יש $x > M$ כך ש- $f(x) = 0$)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq -\infty \quad \text{באופן דומה}$$

כללי חשבון לגבולות אינסופיים

1. $\infty + \infty = \infty$ (קיצור של: אם $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ו- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ אז גם $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \infty$ וזה כולל את המקרים שגם a סופי או $a = \infty$ או $a = -\infty$)

2. $-\infty - \infty = -\infty$

3. $\infty \cdot \infty = \infty$

$\infty(-\infty) = -\infty$

$(-\infty)(-\infty) = \infty$

4. $\infty \cdot c = \begin{cases} \infty & c > 0 \\ -\infty & c < 0 \end{cases}$ c מספר קבוע

5. $\infty + c = \infty$ (לכל c קבוע)

$-\infty + c = -\infty$

6. $\frac{1}{\infty} = 0$

$\frac{1}{-\infty} = 0$

שאלה: מה לגבי המקרים " $\infty - \infty$ ", " $\infty \cdot 0$ ", " $\frac{\infty}{\infty}$ "?

תשובה: נסתכל בדוגמאות הבאות:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x^2) = \lim_{x \rightarrow \infty} 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} ((x^2 + 1) - x^2) = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x^3) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(\frac{1}{x} - 1 \right)$$

$\begin{matrix} \xrightarrow{0} \\ \underbrace{\frac{1}{x}} \\ \xrightarrow{-1} \end{matrix}$

מסקנה: כאשר המצב התחלתי הוא " $\infty - \infty$ " לא ידוע מראש אם הגבול קיים ומה ערכו אלא צריך להביא את הביטוי לצורה המאפשרת את חישוב הגבול.

שאלה: למצוא פונקציות f, g כך ש- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

אבל $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x))$ לא קיים.

תשובה: נבחר למשל $f(x) = x + \sin x$ ו- $g(x) = x$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sin x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(1 + \underbrace{\frac{1}{x} \sin x}_{\substack{\rightarrow 0 \\ \text{חסום}}} \right) = \infty \cdot 1 = \infty$$

אבל $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$ ו- $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ לא קיים

דוגמאות: של " $\frac{\infty}{\infty}$ "

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sin x + 2) = \infty \quad \text{אבל} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\sin x + 2)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sin x + 2)$$

(לא קשה להוכיח ש- $\frac{1}{x(\sin x + 2)} \rightarrow 0$ חיובית). לפי משפט הסנדוויץ'.

יותר דוגמאות:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \frac{2}{x^2} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \frac{1}{x^2} = 1$$

קיצור: כאשר המצב ההתחלתי בחישוב הגבול הוא $\infty - \infty, 0 \cdot \infty, \frac{\infty}{\infty}$

לא ידוע מראש אם הגבול קיים או מה ערכו אלא צריך...

$$\left(\lim_{x \rightarrow 8^+} \frac{1}{x-8} = \infty \right) \Rightarrow \left(\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = \omega \right)$$

תרגיל: לחשב את $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x-2x\sqrt{x}+3}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x-2x\sqrt{x}+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} - 1 + \frac{1}{x^{\frac{7}{6}}} \right)}{x^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} - 2 + \frac{3}{x^{\frac{3}{2}}} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{x^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} - 1 + \frac{1}{x^{\frac{7}{6}}} \right)}^{\rightarrow 0}}{\underbrace{x^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} - 2 + \frac{3}{x^{\frac{3}{2}}} \right)}_{\rightarrow 0}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{x(1+\frac{2}{x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(1+\frac{2}{x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(1+\frac{2}{x})} = \frac{-\sqrt{1}}{1} = -1$$

תרגיל: לחשב את הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-1})$

הוצאת x כגורם. $|x|=x$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{x}_{\rightarrow \infty} \left(\underbrace{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}} \right)}_{\rightarrow 1} - \underbrace{\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} \right)}_{\rightarrow 1} \right) = \infty \cdot 0$$

לא טוב.

דרך אחרת: כפל בצמוד:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x-x^2+1}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(2+\frac{1}{x})}{x \left(\sqrt{1+\frac{2}{x}} + \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} \right)} = \frac{2}{1+1} = 1$$

שיעור 8-א (08.12.09)

פונקציות מעריכיות (Exponential Functions)

יודעים לחשב 2^n עבור כל n טבעי.
נניח שרוצים להוכיח את ההגדרה, ולחשב 2^x לכל x ממשי.
מגדירים $2^{-n} = \frac{1}{2^n}$ לכל n טבעי ובנוסף $2^0 = 1$.
ואז מוגדר 2^n לכל n שלם.

מכאן, ניתן לעבור ל- $2^{\frac{m}{n}}$ כאשר m, n שלמים, $n \neq 0$.
ולהגדיר $2^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{2^m}$ (זאת מתוך הנחה שלכל n טבעי יש מספר x כך ש- $x^n = 2^m$)
לכן הגדרנו את 2^x לכל x רציונלי.
למספרים x אי רציונליים מגדירים את 2^x כגבול של סדרת מספרים מן הסוג הקודם.
(למשל $\sqrt{2} = 1.41\dots$ (לכל מספר יש פיתוח עשרוני אינסופי כזה...))
בונים את הסדרה:

$$2^1 = 2$$

$$2^{1.4} = 2^{\frac{14}{10}} = 2^{\frac{7}{5}}$$

$$2^{1.41} = 2^{\frac{141}{100}} \text{ וכו'}$$

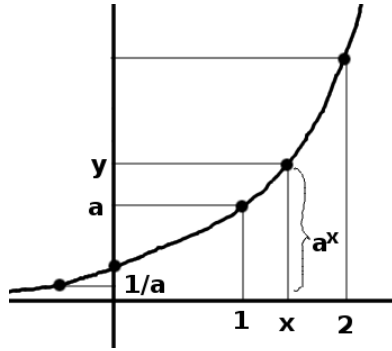
ואז $2^{\sqrt{2}}$ מוגדר כגבול דגרת המספרים הנ"ל.

באופן דומה אם $a > 0$ אז לכל $x \in \mathbb{R}$ ניתן להגדיר את a^x .
אבל אם $a < 0$, למשל $a = -2$, אפשר להגדיר את $(-2)^n$ לכל n שלם.
לא ניתן להגדיר את $(-2)^{\frac{1}{2}}$ (אין מספר ממשי שריבועו הוא -2)
בעצם ניתן להגדיר $(-2)^{\frac{k}{2n+1}}$ n טבעי, k שלם.

כתוצאה מזה, לא ניתן להגדיר את $(-2)^x$ עבור x לא רציונלי.
למשל, בנסיון להגדיר את $(-2)^{\sqrt{2}}$ היינו משתמשים ב- $(-2)^{\frac{141}{100}}$ שלא קיים.

מסקנה: ניתן להגדיר את a^x לכל x ממשי, רק כאשר $a > 0$.
הגדרה: פונקציה מהצורה $f(x) = a^x$, שבה $a > 0, a \neq 1$, נקראת פונקציה מעריכית.

תכונות של פונקציות מערכיות

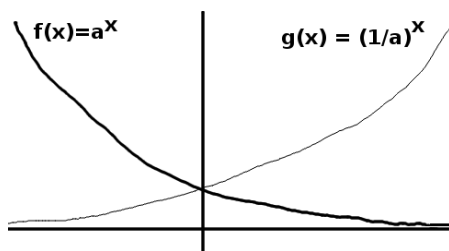


בניח ש- $a > 0$

1. a^x מוגדר לכל $x \in \mathbb{R}$
2. $a^x > 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$
3. הגרף עובר דרך $(0, 1)$
4. אם $x_1 < x_2$ גם $a^{x_1} < a^{x_2}$ ($a > 1$ כאשר)
5. לכל $y > 0$ קיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש- $a^x = y$
(במילים אחרות, הפונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ המוגדרת ע"י $f(x) = a^x$ היא חח"ע (לפי 4) ועל לפי (5) לכן bijection והפיכה.
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$ (עבור $a > 1$)
כלומר לכל $M > 0$ קיים $k > 0$ כך ש- $a^x > M$ לכל $x > k$.
7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ (כאשר $a > 1$) (להוכיח לבד על סמך 6)

בניח ש- $0 < a < 1$

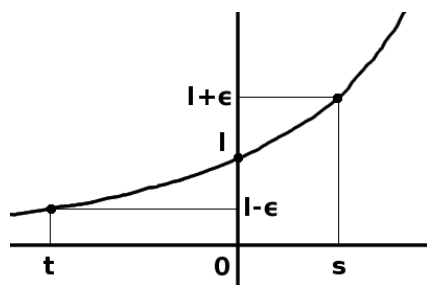
- אז לכל $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$, כאשר $\frac{1}{a} > 1$.
- לכן הגרף והתכונות של $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ מוכרו ומתקיים $f(x) = g(-x)$.
- לכן הגרפים סימטריים ביחס לציר y.
כל התכונות הקודמות נכונות גם כאן למעט שינויים ב:



4. פונקציה יורדת: אם $x_1 < x_2$ אז $a^{x_1} > a^{x_2}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0 \quad .6$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty \quad .7$$



טענה: לכל $a > 0, a \neq 1$ מתקיים $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$

הוכחה:

נניח קודם ש- $a > 1$

לפי הגדרת הגבול צ"ל:

שלכל $\epsilon > 0$ קיים קטע נקוב I_0^*

כך ש- $|x^2 - 1| < \epsilon$ לכל $x \in I_0^*$

($1 - \epsilon < a^x < 1 + \epsilon \Leftrightarrow |x^2 - 1| < \epsilon$ בקטע מתאים)

מאחר ש- $1 + \epsilon > 0$ ו- $1 - \epsilon > 0$

קיימים s, t כך ש- $a^t = 1 - \epsilon$ ו- $a^s = 1 + \epsilon$

(זאת בפני ש- $f(x) = a^x$ היא על (a, ∞))

אז אם נבחר $I_0^* = (t, s) \setminus \{0\}$

נקבל שלכל $x \in I_0^*$ מתקיים $a^t < a^x < a^s$.

(כי $t < x < s$ ו- $f(x) = a^x$ עולה)

כלומר $1 - \epsilon < a^x < 1 + \epsilon$

ולכן $|a^x - 1| < \epsilon$ לכל $x \in I_0^*$

לכל $\epsilon < 1$ הוכחנו שניתן למצוא קטע I_0^* כך ש- $|a^x - 1| < \epsilon$ לכל $x \in I_0^*$

אם $s \geq 1$ נבחר למשל את הקטע I_0^* שמצאנו ל- $\epsilon = \frac{1}{2}$

ואז $|a^x - 1| < \frac{1}{2} < \epsilon$ לכל $x \in I_0^*$

לכן לפי הגדרת הגבול נובע ש- $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$ (כאשר $a > 1$).

אם $0 < a < 1$ אז $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{b}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{b^x} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} b^x} = \frac{1}{1} = 1$ נסמן $b = \frac{1}{a}$ אז $b > 1$

לכן הטענה נכונה לכל $a \neq 0$

חוקי חזקות ושורשים

לכל $a, b > 0$ ולכל $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$1. \quad a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

$$2. \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$3. \quad a^0 = 1$$

$$4. \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

$$5. \quad (ab)^x = a^x \cdot b^x$$

$$6. \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

הגדרה: לכל $x \neq 0$ $\sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}}$

$$7. \quad \sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}} = (a^y)^{\frac{1}{x}} = (a^{\frac{1}{x}})^y$$

$$\text{לכן } \sqrt[x]{a^y} = (\sqrt[x]{a})^y$$

משפט: הפונקציות המעריכיות הן רציפות ב- $\mathbb{R}$

הוכחה: צ"ל שלכל $0 < a \neq 1$, $\lim_{x \rightarrow c} a^x = a^c$ וזאת לכל $c \in \mathbb{R}$.

$$\text{אכן } \lim_{x \rightarrow c} (a^x - a^c) = \lim_{x \rightarrow c} a^c (x^{x-c} - 1) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t = x-c \\ \text{נציב} \\ \text{קבוע}}} \underbrace{a^c}_{\rightarrow 0} (a^t - 1) = a^c \cdot 0 = 0$$

מכאן לפי כלל ההפרש נקבל ש- $\lim_{x \rightarrow c} a^x = a^c$ מ.ש.ל.

המספר e

נסתכל על $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ כאשר n טבעי.

מסתבר שלכל ש-n גדל המספרים $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ מתקרבים למספר מסוים בין 2 ל-3

(לסדרה הנ"ל יש גבול). מסמנים $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

הכללה: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ (כאשר $x \in \mathbb{R}$ - לא נוכיח)
 $e \approx 2.71828...$

טענה: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

הוכחה: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ x = -t}} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t}{t-1}\right)^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^t$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^1$$

לפי המשפט הקודם (מחליפים את $t-1$ ב-y) e^t 

לכן $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

מסקנה: $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

הוכחה: $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ \frac{1}{x} = t}} (1 + \frac{1}{t})^t = e$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0^- \\ \frac{1}{x} = t}} (1 + \frac{1}{t})^t = e$

שיעור 8-ב (10.12.09)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad \text{ראינו ש-}$$

משפט: אם $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ אז $\lim_{x \rightarrow a} (1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = e$
 המשפט מתאפשר לטפל במקרים מהסוג " 1^∞ ".

פונקציות לוגריתמיות

הערה: ידוע שלמשוואה $2^x = 3$ יש פתרון יחיד.
 כי $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = 2^x$ היא על וחד"ע)
 מסמנים את הפתרון של המשוואה ב- $x = \log_2 3$

באופן כללי ידוע שאם $0 < a \neq 1$ ואם $b > 0$ לשמוואה $a^x = b$ יש פתרון יחיד.

הגדרה: לכל $a > 0$, $a \neq 1$ ולכל $b > 0$
 מסמנים ב- $\log_a b$ את הפתרון היחיד של המשוואה $a^x = b$.

בקיזור: $a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x$

מסקנות: (מן ההגדרה הנ"ל)
 לכל $a > 0$, $a \neq 1$ ולכל $x > 0$ מתקיים $\log_a(a^x) = x$ ו- $a^{\log_a x} = x$.

הערה: אם נסמן ב- $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ את $f(x) = a^x$
 ונסמן ב- $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ את $g(x) = \log_a x$
 אז $g(f(x)) = x$ ו- $f(g(x)) = x$
 לכל $x \in \mathbb{R}$ לכל $x \in (0, \infty)$

הסבר:

$$g(f(x)) = g(a^x) = \log_a(a^x) = x$$

$$f(g(x)) = f(\log_a x) = a^{\log_a x} = x$$

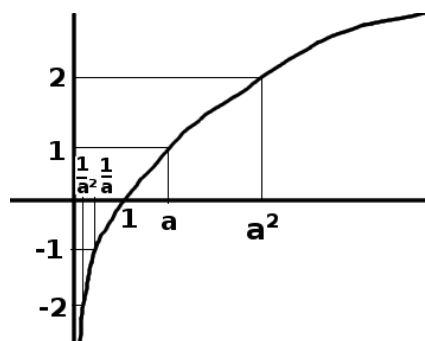
תוכונות של פונקציות הלוגריתמיות

בניח ש- $a > 1$

ננסה לתאר את $f(x) = \log_a x$

ידוע ש- $a^y = x \Leftrightarrow y = \log_a x$

ברור מכאן ש- x חייב להיות חיובי אבל y יכול לקבל כל ערך ממשי.



$f(1) = 0$ כלומר $(a^0 = 1) \log_a 1 = 0$

$\log_a a = 1$

$\log_a a^k = k$

בניח ש- $0 < a < 1$ אז $\frac{1}{a} > 1$

נסמן $f(x) = \log_a x$

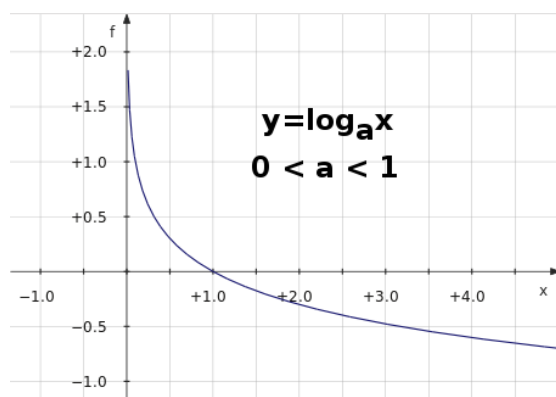
$\log_{\frac{1}{a}}(x) = y$

$\Leftrightarrow$

$x = \left(\frac{1}{a}\right)^y = a^{-y}$

לכן $\log_a x = -y$

ולכן $\log_a x = \log_{\frac{1}{a}} y$



מסקנה: $f(x) = -\log_{\frac{1}{a}} x$ כאשר $\frac{1}{a} > 1$

מסקנה: הגרפים של $\log_a x$ ו- $\log_{\frac{1}{a}} x$

הם סימטריים זה לזה

ביחס לציר x לכן, אם $0 < a < 1$

רשימות תכונות של $f(x) = y = \log_a x$

בניח ש- $a > 1$

1. תחום ההגדרה של $f(x) = \log_a x$ הוא $(0, \infty)$
2. $\log_a x$ יכול להיות כל מספר ממשי (חיובי, שלילי או 0)
3. $\log_a 1 = 0$ (הנקודה $(1, 0)$ היא על הגרף).
4. לכל $y \in \mathbb{R}$ יש $x > 0$ כך ש- $\log_a x = y$ (כי למשוואה $a^y = x$ יש פתרון)
5. אם $0 < x_1, x_2$ אז גם $\log_a x_1 < \log_a x_2$ ($\log_a x$ פונקציה עולה). (כאשר $a > 1$)
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \infty$ (כאשר $a > 1$)
7. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$ (כאשר $a > 1$)

את 6,7 אפשר להוכיח ע"י שימוש הגדרת הגבול ותכונת 4,5.

הסבר ל-5: בניח ש- $x_1 < x_2$ נסמן $\log_a x_1 = y_1$ $\log_a x_2 = y_2$ אז $x_1 = a^{y_1} < a^{y_2} = x_2$ אבל $a^{y_1} < a^{y_2}$ עולה כאשר $a > 1$ ולכן בהכרח $y_1 < y_2$ כלומר $\log_a x_1 < \log_a x_2$.

רשימת תכונות דומה ניתן לנסח עבור $\log_a x$ כאשר $0 < a < 1$.

חוקי לוגריתמיות

לכל $a > 0$ $a \neq 1$ ולכל $x, y > 0$ מתקיים:

1. $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
3. $k \in \mathbb{R}$ לכל $\log_a x^k = k \log_a x$
4. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ מעבר מבסיס לבסיס

הוכחות 4: נסמן $\log_b x = m$ אז $b^m = x$ נעלה ב-n: $b^{mn} = x^n$

$b^{mn} = a^m$ $b^n = a$ אז $\log_b a = n$

ולכן $a^m = x^n$

$n \log_a x = m$ ולכן $\log_a x^n = m$

ולכן $\log_a x = \frac{m}{n}$ מ.ש.ל.

הגדרה: הפונקציה $\ln(x) = \log_e x$ (כאשר $e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$)

נקראת **הלוגריתם הטבעי**.

הערה: $\log_a x = \frac{\log_e x}{\log_e a} = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x$

לכן כל פונקציה לינארית היא כפולה בקבוע של $\ln$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\underbrace{\ln a}_{\text{קבוע}}}$$

משפט: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (בהנחה ש- $\ln$ רציפה)

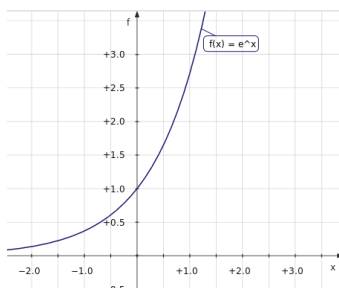
הוכחה: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\ln(1+x)}^{\rightarrow \ln 1 = 0}}{\underbrace{x}_{\rightarrow 0}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln \underbrace{(1+x)^{\frac{1}{x}}}_{\rightarrow e} = \ln e = 1$

טענה: $\ln x$ רציפה ב-1.

הוכחה: נניח ש- $f(x) = \ln(1+x)$ רציפה ב-0.

נשים לב ש- $\otimes f(x) = \ln(1+x) = x \cdot \underbrace{\frac{1}{x} \cdot \ln(1+x)}_{\rightarrow 0 \text{ כ-} x \rightarrow 0} = x \cdot \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \rightarrow 0$ (קרוב ל- e)(חסומה 0)

ידוע שכאשר x מספיק קרוב ל-0 אז $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ קרוב כרצוננו ל- e .



לכן קיים קטע I_0^* כך
שכל $x \in I_a^*$ $2 < (1+x)^{\frac{1}{x}} < 3$
 $\frac{2}{e} \quad \frac{3}{e}$

לכן $\ln 2 < \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} < \ln 3$ לכל $x \in I_a^*$ (בגלל מונוטוניות הפונקציה $\ln$)

לכן $\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$ חסומה ב- I_0^* (לפי $\otimes$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x) = \ln 1$$

מסקנה:

לכן $\lim_{t \rightarrow 1} \ln t = \ln 1 = 0$ ולכן $\ln$ רציפה ב-1. ($t=1+x$)

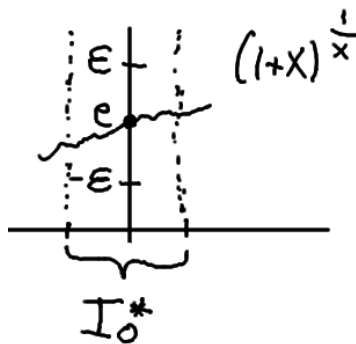
משפט: הפונקציה $f(x) = \ln x$ רציפה ב- $(0, \infty)$

הוכחה: צ"ל שלכל $c > 0$, $\lim_{x \rightarrow c} \ln x = \ln c$ אכן:

$$\lim_{x \rightarrow c} (\ln x - \ln c) = \lim_{x \rightarrow c} \ln\left(\frac{x}{c}\right) = \lim_{t \rightarrow 1} \ln t = 0$$

$t = \frac{x}{c}$

לכן לפי כלל ההפרש $\lim_{x \rightarrow c} \ln x = \ln c$ מ.ש.ל.



משפט: נביח $0 < a \neq 1$ אז $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$

הוכחה: נסמן $y = \frac{a^x - 1}{x}$ אז $a^x - 1 = x \cdot y$ (מחפשים את $\lim_{x \rightarrow 0} y$)

מאחר ש- $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$ נובע ש- $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot y = 0$.

$$a^x = 1 + xy \quad \text{אז}$$

$$a = (1 + xy)^{\frac{1}{x}}$$

$$a = \left[\underbrace{(1 + xy)^{\frac{1}{xy}}}_{\rightarrow e} \right]^y$$

$$\ln a = y \cdot \ln(1 + xy)^{\frac{1}{xy}}$$

ולכן $y = \frac{\ln a}{\ln(1 + xy)^{\frac{1}{xy}}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{\ln a}{\ln e} = \ln a$ ו- $\ln$ רציפה.

שיעור 9-א (15.12.09)

חישובי גבולות

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$\lim_{f(x) \rightarrow 0} (1 + f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = e$$

תרגיל: נניח ש- $a, b > 0$ צריך לחשב את $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$

תשובה:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \underbrace{\frac{a^x + b^x}{2} - 1}_{\rightarrow 0} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \underbrace{\frac{a^x + b^x - 2}{2}}_{\rightarrow 0} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\underbrace{\left(1 + \frac{a^x + b^x - 2}{2} \right)^{\frac{2}{a^x + b^x - 2}}}_{\rightarrow e} \right]^{\frac{a^x + b^x - 2}{2x} \rightarrow \square}$$

נחשב בנפרד את: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + b^x - 2}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left[\underbrace{\frac{a^x - 1}{x}}_{\rightarrow \ln a} + \underbrace{\frac{b^x - 1}{x}}_{\rightarrow \ln b} \right] = \ln \sqrt{ab}$

להמשיך: לכן $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\underbrace{\left(1 + \frac{a^x + b^x - 2}{2} \right)^{\frac{2}{a^x + b^x - 2}}}_{\rightarrow e} \right]^{\frac{a^x + b^x - 2}{2x} \rightarrow \ln \sqrt{ab}} = e^{\ln \sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$

הסדר למדרגה $\otimes$: השתמשנו במשפט ההוא:

אם $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = K$ קיים וחיובי ואם $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ קיים, אז $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = K^L$.

הוכחה: $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$

לכן $\lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \cdot \ln f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot \ln f(x)$ בתנאי שהגבול קיים
כי e^x רציפה

ולפי כלל המכפלה (בתנאי שהגבולות מימין קיימים):

$$= e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot \ln(\lim_{x \rightarrow a} f(x))} = e^{L \cdot \ln K} = e^{\ln K^L} = K^L$$

רציפה $\ln$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

מסקנה:

בתנאי שהגבולות מימין קיימים ו- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \square \quad \text{לחשב (עבור } n \text{ טבעי)}$$

שאלה:

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

תזכורת:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \underbrace{(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)}_{\substack{\text{מחזורים השואפים ל-1} \\ n \\ 0}} = n$$

תשובה:

$$\text{שאלה: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{\sqrt{2}} - 1}{x - 1} \quad \text{או} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^\pi - 1}{x - 1} \quad \text{ומה לגבי}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^a - 1}{x - 1} = a$$

משפט:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^a - 1}{x - 1} = a \quad \text{נסמן} \quad y = \frac{x^a - 1}{x - 1} \quad \text{אז} \quad \lim_{x \rightarrow 1} y(x - 1) = 0$$

הוכחה:

$$(\lim_{x \rightarrow 1} y(x - 1) = 0 \text{ נשים לב ש-})$$

$$x^a = 1 + y(x - 1) \quad \text{לכן}$$

$$a \ln x = \ln(1 + y(x - 1)) \quad \text{ולכן}$$

$$a \ln x = \left[\frac{\ln(1 + y(x - 1))}{y(x - 1)} \right] \cdot y(x - 1) \quad \text{נשים לב ש-}$$

$$y = a \cdot \frac{\ln x}{x - 1} \cdot \frac{1}{\underbrace{\frac{\ln(1 + y(x - 1))}{y(x - 1)}}_{\rightarrow 1}} \quad \text{לכן}$$

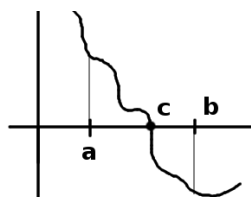
$$t = y(x - 1) \rightarrow 0 \quad \text{כמו} \quad \frac{\ln(1 + t)}{t} \quad \text{כאשר}$$

לכן לפי כלל המכפלה

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + t)}{t} = 1$$

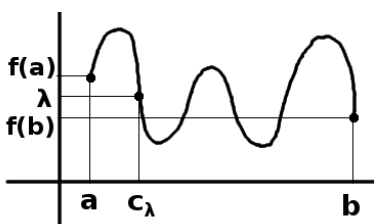
$$\lim_{x \rightarrow 1} y = a \quad \text{מ.ש.ל.}$$

משפט ערך הביניים לפונקציות רציפות



משפט: אם f רציפה בקטע הסגור $[a, b]$ ואם $f(a) \cdot f(b) < 0$ אז קיימת נקודה $c \in (a, b)$ כך ש- $f(c) = 0$

משפט: אם f רציפה בקטע $[a, b]$ אז לכל ערך λ שנמצא בין $f(a)$ ל- $f(b)$ אז קיים $c_\lambda \in [a, b]$ כך ש- $f(c_\lambda) = \lambda$
(כלומר f מקבלת בקטע $[a, b]$ את כל הערכים שבין $f(a)$ ל- $f(b)$)



הוכחה: נניח ש- f רציפה ב- $[a, b]$ ו- $f(a) \leq \lambda \leq f(b)$
נסמן $g(x) = f(x) - \lambda$ אז גם g רציפה ב- $[a, b]$
אז $g(a) = f(a) - \lambda \leq 0$ ו- $g(b) = f(b) - \lambda \geq 0$

אם יש שוויון ב- a אז $g(a) = f(a) - \lambda = 0$ ואז $f(a) = \lambda$ (ואז נבחר $c_\lambda = a$)
שיקול דומה כאשר $g(b) = f(b) - \lambda = 0$

ואם $g(a) = f(a) - \lambda < 0$ ו- $g(b) = f(b) - \lambda > 0$
אז לפי משפט הקודם, קיימת נקודה $c_\lambda \in (a, b)$ כך ש- $g(c_\lambda) = 0$
ואז $f(c_\lambda) = \lambda$

תרגיל: להוכיח שלפולינום $x^{10} + 7x^7 + 5$ יש שורש בקטע $[1, 2]$.

תשובה: נסמן $f(x) = x^{10} - 7x^5 + 5$
אז f רציפה ב- $[1, 2]$ (כי היא פולינום)
ו- $f(1) = 1 - 7 + 5 = -1$ ו- $f(2) = 2^{10} - 7 \cdot 2^7 + 5 = 2^7(8 - 7) + 5 > 0$
לכן לפי משפט ערך ביניים קיים $c \in (1, 2)$ כך ש- $f(c) = 0$

שאלה: להוכיח שלמשוואה $\ln x = \cos x$ יש פתרון בקטע $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$.

תשובה: נסמן $f(x) = \ln x - \cos x$ אז f רציפה בקטע $\left[1, \frac{\pi}{2}\right]$

$$f(1) = \ln 1 - \cos 1 = 0 - \cos 1 < 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2} = \ln \frac{\pi}{2} > 0$$

לכן לפי משפט ערך הביניים יש נקודה $c \in \left(\frac{\pi}{2}\right)$ כך ש- $f(c) = 0$

$$\ln c = \cos c \quad \text{כלומר}$$

משפט: לכל פולינום ממעלה אי-זוגית יש שורש ממשי.

הוכחה: נניח ש- $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ כאשר n אי-זוגי ו- $a_n \neq 0$

אז $P(x)$ רציפה ב- $\mathbb{R}$ (פולינום).

נניח למשל ש- $a_n > 0$ ונזכיר שקיים c ממשי כך ש- $P(c) = 0$
(אם $a_n < 0$ נבחר את $-P(x)$ במקום $P(x)$ ונקבל שוב קיום c כזו).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} a_n x^n \underbrace{\left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n}\right)}_{\text{קטובי}} = \infty \quad \text{מתקיים:}$$

לפי הגדרת הגבול, למשל עבור $K = 1$

קיים $M > 0$ כך ש- $P(x) > K = 1$ לכל $x > M$

$$\text{בפרט: } P(M+1) > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = -\infty \quad \text{באופן דומה}$$

לכן עבור $K = -1$ קיים $L < 0$ כך ש- $f(x) < K$ לכל $x < L$

$$\text{בפרט } f(L-1) < -1.$$

$P(x)$ רציפה בקטע $[L-1, M+1]$ ו- $P(M+1) > 0$, $P(L-1) < 0$

לכן לפי משפט ערך הביניים קיים $c \in (L-1, M+1)$ כך ש- $P(c) = 0$.

שיעור 9-ב (17.12.09)

משיק ונגזרת



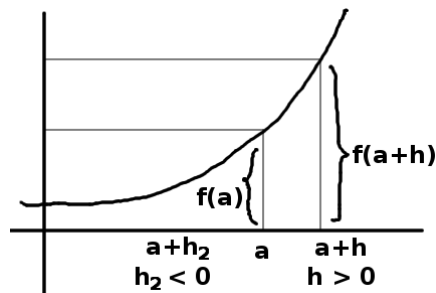
הקדמה:

משיק לגרף של פונקציה בנקודה אמור להיות **קו ישר** העובר דרך אותה נקודה והוא הקרוב ביותר לגרף מבין כל הישרים העוברים דרך אותה נקודה. (לא מובטח שתמיד קיים ישר כזה)

הערה:

מפני שהמשיק הוא קו ישר והוא אמור לעבור דרך נקודה נתונה, כל מה שצריך למצוא (אם בכלל קיים משיק) הוא השיפוע שלו.

נניח שקיים משיק לגרף הפונקציה $y=f(x)$ בנקודה שבה $x=a$.



כלומר בנקודה $(a, f(a))$

עם נקודה $(a+h, f(a+h))$

אז שיפוע המיטר המחבר נקודות אלה הוא

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

שיפועי המיטרים האלה שואפים לשיפוע המשיק (אם יש משיק) כאשר $h \rightarrow 0$.
זה רק הסבר הגיאומטרי של ההגדרה הבאה:

הגדרה:

נניח ש- f מוגדרת בקטע פתוח המכיל את a .

נאמר ש- f **גזירה** בנקודה a אם $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ קיים וסופי.

כאשר f גזירה ב- a מסמנים את הגבול הנ"ל ב- $f'(a)$

ומספר זה נקרא הנגזרת של f בנקודה a .

הגדרה:

אם f גזירה בנקודה a , נאמר שהישר $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

(כלומר $y=f(a)+f'(a)(x-a)$)

נקרא המשיק לגרף הפונקציה f בנקודה a .

(ברור מן ההגדרה שזה ישר בעל שיפוע $f'(a)$ ועובר דרך $(a, f(a))$)

הערה: קיום הגבול $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ שקול לקיום הגבול $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (מציבים $h=x-a$ או $x=a+h$)

דוגמאות: הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$ גזירה בכל נקודה $a>0$.

הוכחה: לפי הגדרת הנגזרת עלינו לחשב (עבור $a>0$) את

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \end{aligned}$$

בסביבת a , $\sqrt{x}$ חיובי לכן $\sqrt{x}$ מוגדר. (רציפה ב- a)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \quad \text{לכן}$$

מסקנה: הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}$ היא גזירה לכל $a>0$ ו- $f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}$.

הגדרת: אם f גזירה בכל נקודה בתחום D , הפונקציה המתאימה לכל $x \in D$ את $f'(x)$ נקראת הפונקציה הנגזרת של f ומסמנים אותה ב- f' .

מסקנה: $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ לכל $a>0$

יש לשים לב שהתחום של $f(x)=\sqrt{x}$ לא זהה לתחום של $f(x)$.

הערה: אם $f(x)=\sqrt{x}$ אז לכל $a>0$ שיפוע המשיק לגרף של f הוא $f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}>0$ - קצב השינוי של הפונקציה אומנם חיובי אבל קטן.

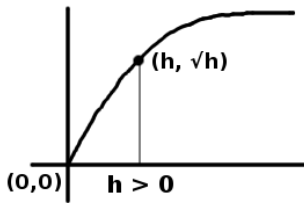


מצד שני $f(x)=\sqrt{x}$ אינה גזירה ב-0 כי היא לא מוגדרת בשום קטע פתוח המכיל את 0.

(המשך בדף הבא...)

בכל זאת ניתן לשאול

האם קיים ישר "קרוב ביותר" לגרף הפונקציה בנקודה $(0,0)$



אז גבול שיפועי המיתרים המחברים את $(0,0)$

עם נקודות קרובות על הגרף הוא

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

לכן קיים ישר משיק לגרף בנקודה $(0,0)$ והוא ציר ה-y.

דוגמה:

האם הפונקציה $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ גזירה ב- $a=0$?

האם יש משיק לגרף בנקודה זו? $(x^{\frac{1}{3}} \text{ מוגדת ב- } \mathbb{R})$

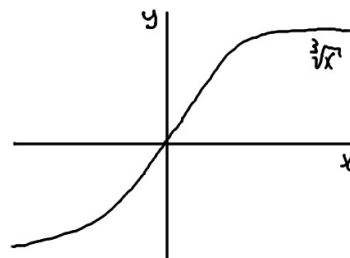
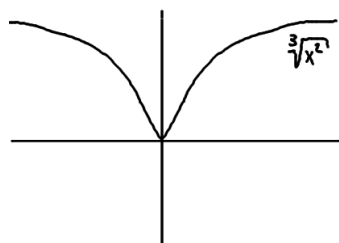
תשובה:

על-פי הגדרת הנגזרת, נחשב את $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

לכן $f(x)$ לא גזירה ב- $a=0$ (כי הגבול לא סופי)

אבל יש משיק לגרף והוא בעל שיפוע אינסופי (ציר ה-y)



הערה:

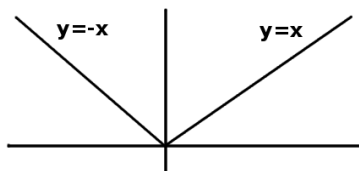
הפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{x}$ היא רציפה ב- $\mathbb{R}$ ובפרט רציפה ב-0

אבל היא לא גזירה ב-0. (ובכל זאת יש לה משיק לגרף באותה נקודה).

עוד דוגמה של פונקציה רציפה שאינה גזירה בנקודה

$f(x)=|x|$ - רציפה בכל הישר ובפרט ב-0.

נבדוק האם היא גזירה ב-0.



לפי הגדרת הנגזרת נחשב $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$

הגבול לא קיים כי $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$ ו- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$

מכאן ש- $f(x)=|x|$ לא גזירה ב-0.

בנוסף, לא קיים משיק לגרף הפונקציה באותה נקודה כי גבולות שיפועי המיתרים מימין ומשמאל הם שונים.

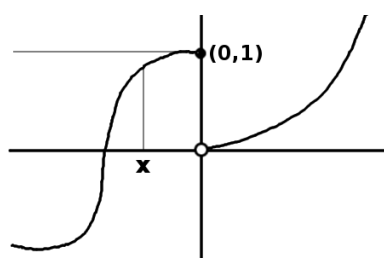
שאלה: האם הפונקציה $f(x) = \begin{cases} \cos x & x \leq 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$ היא גזירה ב-0?

לא לעשות: דוגמה לשיקול **רע**:

$$f'(x) = \begin{cases} -\sin x & x \leq 0 \\ 2x & x > 0 \end{cases}$$

לכן $f'(0)=0$ גזירה ו-

פתרון: לפי הגדרת הנגזרת עלינו לחשב את $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$



נחשב גבולות חד צדדיים:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

לכן הפונקציה לא גזירה ב-0 וגם אין משיק לגרף באותה נקודה.

הערה חשובה: שיפועי המשיקים לגרף בנקודות שוות ל-0 לא משפיעים על שיפוע המשיק ב-0.

משפט: אם f גזירה בנקודה a אז f רציפה ב- a .

הוכחה: אם f גזירה ב- a אז f מוגדרת בקטע פתוח המכיל את a ו-

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \quad \text{קיים וסופי.}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left[\underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{\rightarrow f'(a)} \underbrace{(x - a)}_{\rightarrow 0} + f(a) \right] = f(a) \quad \text{אז}$$

לכן $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ולכן f רציפה ב- a .

שאלה: האם $D(x)$ גזירה ב-0?

תשובה: לא כי היא לא רציפה ב-0.

בשאלה: האם $x D(x)$ גזירה ב-0?

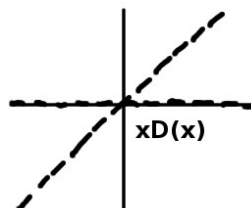
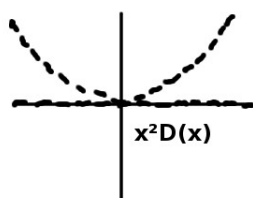
תשובה: לפי הגדרת הנגזרת $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x D(x) - 0 D(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} D(x)$ - לא קיים.

לכן $x D(x)$ לא גזירה ב-0 למרות שהיא רציפה שם.

שאלה: האם $x^2 D(x)$ גזירה ב-0?

תשובה: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 D(x) - 0^2 D(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x D(x) = 0$

לכן הפונקציה גזירה (ובפרט רציפה ב-0) והנגזרת שלה ב-0 היא 0.



שיעור 10-א (22.09.12)

(באדיבות עידו פישלר)

תכונות המשיק

מה ההבדל בין גרף "חלק" בנקודה $\cup$ לעומת $\vee$,
ומה ההבדל בין ישר הנתן $\searrow$ לבין משיק $\nearrow$?

נכונה שכדי לאפיין את המשיק צריך למצוא את הישר הקרוב ביותר לגרף
מבין כל הישרים העוברים דרך הנקודה.

הערה: אם f גזירה ב- a אז $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$

הדרך שקול ל: $\alpha(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)$

אז: $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$

לכן ניתן לרשם $f(x) - f(a) - (x - a) \cdot f'(a) = \alpha(x)(x - a)$

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x - a)}_{\text{המשיק לגרף ב-} a} + \underbrace{\alpha(x)(x - a)}_{\text{ההפרש בין המשיק לגרף שואף ל-0}}$$

גם כאשר מחלקים את ההפרש הנ"ל ב- $(x - a)$
עדיין נקבל ביטוי (שהיא $\alpha(x)$) השואף ל-0.

במילים אחרות:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\overbrace{f(x) - f'(a)(x - a)}^{\text{ישר}} - \overbrace{f(x)}^{\text{פונקציה}}}{x - a} = \alpha(x)$$

שואף ל-0 כאשר $x \rightarrow a$

משפט:

נניח ש- f רציפה ב- $x = a$.

אז f גזירה בנקודה a אם ורק אם קיים ישר $y = mx + n$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - mx - n}{x - a} = 0$$

ההפרש בין הפונקציה לישר

(בצורה מהירה ניתן לחלק אפילו ב- $x - a$ ועדיין שואף ל-0)

הוכחה:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} = 0 \quad \text{אם } f \text{ גזירה ב-} a \text{ אז כפי שראינו}$$

לכן קיים ישר $y = mx + n = f(a) + f'(a)(x-a)$ הישר מקיים את מה שרצינו להוכיח.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(a) - mx - n}{x-a} = 0 \quad \text{להפך, נניח שקיים ישר } y = mx + n \text{ כך ש-}$$

אז מהגדרת הגבול עבור $\epsilon = 1$ למשל נקבל שקיים קטע I_a^* כך ש-

$$0 \leq |f(x) - mx - n| \leq \underbrace{|x-a|}_{\rightarrow 0} \quad \text{כלומר } x \in I_a^* \text{ לכל } \left| \frac{f(x) - mx - n}{x-a} - 0 \right| < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \underbrace{f(x) - mx - n}_{\text{פונקציה רציפה ב-} a} = 0 \quad \text{ולכן } \lim_{x \rightarrow a} |f(x) - mx - n| = 0 \quad \text{לפי משפט הסנדוויץ'}$$

$$\text{לכן } f(x) - ma - n = 0 \quad \text{ולכן } h = f(a) - ma$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - mx - \overbrace{(f(a) - ma)}^h}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x-a} - \underbrace{\frac{h}{x-a}}_{\text{קבוע}} \right] = 0 \quad \text{מכאן נובע ש-}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \square \quad \text{לכן לפי כלל ההפרש, } \square = f'(a) \quad \text{ו-}$$

לכן f גזירה ב- a .

מסקנה:

יש רק ישר אחד שיכול לקיים את התכונה שבמשפט הנ"ל:

$$y = mx + n = f'(a)x + f(a) - f'(a)a = f(a) + f'(a)(x-a)$$

כלומר רק המשיק יכול לקיים תכונה זו.

לסיכום:

f גזירה ב- a או ("חלקה" ב- a)

אם קיימת פונקציה $\alpha(x)$ השואפת ל-0 כך ש-

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0 \quad \text{כאשר } f(x) = f(a) - f'(a)(x-a) + \alpha(x)(x-a)$$

כללי גזירה

משפט: נניח ש- f, g גזירות בנקודה a אז:

1. כלל החיבור: $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ גזירה ב- a ו- $f+g$
2. כלל המכפלה: $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$ גזירה ב- a ו- $f \cdot g$
3. אם $f(x) = c$ (קבוע) אז $f'(x) = 0$ בכל x .
4. כפל בסקלר: $(cf)'(a) = c \cdot f'(a)$ גזירה ב- a ו- $c \cdot f$
5. כלל המנה: אם $g(a) \neq 0$ אז גם $\frac{f}{g}$ גזירה ב- a ו-

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{(g(a))^2}$$

הוכחת 5:

מאחר ש- g גזירה ב- a נובע ש- g רציפה ב- a .

לכן $\lim_{x \rightarrow a} g(a) \neq 0$ לפי המשפט.

אם כך אז קיים קטע I_a^* שבו $g(x) \neq 0$ לכל $x \in I_a^*$

(כלומר ש- g חיובית או שלילית ב- I_a^*)

לכן קיים קטע שבו I_a $\frac{f(x)}{g(x)}$ מוגדרת.

(נשים לב ש- f, g גזירות ב- a לכן מוגדרות ב- a ו- $g(a) \neq 0$)

כאן נוכיח ש- $\frac{f}{g}$ גזירה, לפי ההגדרה:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(x)}{(x-a) \cdot g(x) \cdot g(a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) - f(a)) \cdot g(a) - f(a) \cdot (g(x) - g(a))}{(x-a) \cdot (g(x) \cdot g(a))} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{\rightarrow f'(a)} \cdot \underbrace{\frac{g(a)}{g(x) \cdot g(a)}}_{g(a)} - \underbrace{\frac{f(a)}{g(x) \cdot g(a)}}_{g'(a)} \cdot \underbrace{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}}_{g'(x)} \\ &= \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{(g(a))^2} \end{aligned}$$

נוסחאות לגזירה

נגזרת של פונקציית חזקה

(א) $f(x) = x^n$ (n טבעי) - מוגדרת בכל נקודה. לכל $c \in \mathbb{R}$:

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{x^n - c^n}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{c^n \left[\left(\frac{x}{c} \right)^n - 1 \right]}{c^n \left[\left(\frac{x}{c} \right) - 1 \right]} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{c^{n-1} \left(\frac{x}{c} \right)^n - 1}{x - c - 1}$$

נציב $t = \frac{x}{c}$

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{c^{n-1} \left(\frac{t^n - 1}{t - 1} \right)}{t - 1} = c^{n-1} (t^{n-1} + t^{n-2} + \dots + t + 1) = n \cdot c^{n-1}$$

מסקנה: לכל $c \neq 0$ הפונקציה x^n גזירה ב-c והנגזרת שלה הוא $n \cdot c^{n-1}$.

כלומר $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ לכל $c \neq 0$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-1} = 0 \quad n \geq 2$$

ובנוסף, לכל $n \geq 2$ $f'(0) = 1$ ואז $n = 1$ ואז

לכן $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ נכונה גם עבור $x = 0$ וגם עבור $x = 1$ (כי $x' = 1$ לכל x)

מסקנה: $x \in \mathbb{R}$ לכל $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

(ב) $f(x) = x^n$ כאשר n שלם ושלילי. f מוגדרת לכל $x \neq 0$

$$(x^n)' = \left(\frac{1}{x^{-n}} \right)' \rightarrow -n \text{ טבעי} \rightarrow (x^{-n})' = -n \cdot x^{-n-1} \quad (\text{לפי א'})$$

$$\frac{1' \cdot x^{-1} - 1(x^{-n})'}{(x^{-n})^2} = \frac{(-1)(-n)x^{-n-1}}{x^{-2n}} = n \cdot x^{-n-1+2n} = n \cdot x^{n-1}$$

שיעור 10-ב (24.09.12)

ראינו ש- $(x^n)' = nx^{n-1}$ לכל n שלם ולכל x שעובורו שני האפגים מוגדרים.

הנגזרת של x^a עבור $x \geq 0$ (a ממשי כלשהו)

לפי הגדרת הנגזרת, אם $f(x) = x^a$ אז לכל $c > 0$, $f'(c)$ (אם הוא קיים)

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{x^a - c^a}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{c^a \left(\left(\frac{x}{c} \right)^a - 1 \right)}{c \left(\frac{x}{c} - 1 \right)}$$

$$\text{נציב } t = \frac{x}{c} \text{ ונקבל ש- } \lim_{t \rightarrow 1} c^{a-1} \frac{t^a - 1}{t - 1} = ac^{a-1}$$

מסקנה: $(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$ לכל $x > 0$

הערה: מבין פונקציות החלקה $f(x) = x^a$

לא גזרנו עדיין את $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ כאשר n אי זוגי. (עבור $x < 0$ או $x \leq 0$)

למשל לא גזרנו את $x^{\frac{14}{5}}$ עבור $x \leq 0$ למרות שהפונקציה מוגדרת שם.

נגזרות של פונקציות מערכיות

לכל $c \in \mathbb{R}$ $1 \neq a > 0$ $f(x) = a^x$

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{a^x - a^c}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{a^c (a^{x-c} - 1)}{x - c}$$

נציב $t = x - c$, אז $t \rightarrow 0$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \right) \text{ (הוכחנו בעבר ש-)} \lim_{t \rightarrow 0} a^c \frac{a^t - 1}{t} = a^c \ln a$$

מסקנה: $(a^x)' = a^x \ln a$ לכל x ממשי.

ובפרט, $(e^x)' = e^x$ כי $\ln e = 1$.

נגזרות של פונקציות לוגריתמיות

נניח ש- $f(x) = \ln x$

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{\ln x - \ln c}{x - c} \quad (\text{אם קיים})$$

נציב $t = x - c$, $t \rightarrow 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(c+t) - \ln c}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{c+t}{c}\right)}{\frac{t}{c}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{t}{c}\right)}{\frac{t}{c}} = \frac{1}{c}$$

$$\left(x = \frac{t}{c}\right) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) = 1 \quad \text{כי}$$

$$x > 0 \quad \text{לכל} \quad (\ln x)' = \frac{1}{x} \quad \text{מסקנה:}$$

$$\left(\ln n \simeq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

$$\left(\ln(\ln n) \simeq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \dots\right) \quad (\text{מס' ראשוניים})$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \quad 0 < a \neq 1 \quad \text{לכל}$$

$$x > 0 \quad \text{לכל} \quad (\log_a x)' = \left(\underbrace{\frac{1}{\ln a}}_{\text{קבוע}} \cdot \ln x\right)' = \frac{1}{\ln a} (\ln x)' = \frac{\frac{1}{\ln a} \cdot 1}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln a} \quad \text{לכן}$$

$$(\ln 3)' = 0 \quad \text{הערה:} \quad \text{נגזרת של פונקציה קבוע.}$$

$$(\ln x)'_{x=3} = \frac{1}{3} \quad \text{להבדיל מ-}$$

נגזרות של פונקציות טריגונומטריות

הנגזרת של $\sin$: לכל c ממשי:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{\sin x - \sin c}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \underbrace{\frac{2 \sin \frac{x-c}{2} \cos \frac{x+c}{2}}{\frac{x-c}{2} \cdot 2}}_{\text{נוסחה ידוע}} = \cos c$$

(המעל שווה ל-1 כי $\frac{x-c}{2}$ שואף ל-0)

$$(e^{i \cdot \pi} = -1, \quad i = \sqrt{-1} \quad \text{כאשר} \quad e^{ix} = \cos x + i \sin x)$$

ולכן $(\sin x)' = \cos x$ לכל x .

הנגזרת של $\cos$:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{\cos x - \cos c}{x - c}$$

נסמן $t = x - c$ אז $t \rightarrow 0$ ו- $x = c + t$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(c+t) - \cos c}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos c \cos t - \sin c \sin t - \cos c}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\cos c \cdot \frac{\cos t - 1}{t} - \frac{\sin t}{t} \cdot \sin c \right]$$

מקסנה: $(\cos x)' = -\sin x$ לכל x ממשי.

הנגזרת של $\tan$:

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)', \quad \underbrace{=}_{\text{כלל המנה}} \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

לכן $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ לכל $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

באופן דומה $(\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$

סיכום נוסחאות גזירה:

$$1. \quad (x^a)' = ax^{a-1} \quad (\text{לכל } x \text{ שעבורו שני האגפים קיימים}) \\ \text{לא השאמנו את כל המקרים.}$$

$$2. \quad (c)' = 0 \quad (a^x)' = a^x \ln a$$

$$3. \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$4. \quad (\sin x)' = \cos x$$

$$5. \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$6. \quad (\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\left(\sqrt[3]{\frac{5x^5}{7x^{\frac{3}{7}}}} \right)' = \left[\sqrt[3]{\frac{5}{7}} (x^{5-\frac{3}{7}})^{\frac{1}{3}} \right]' = \sqrt[3]{\frac{5}{7}} \left(x^{\frac{32}{21}} \right)' = \sqrt[3]{\frac{5}{7}} \cdot \frac{32}{21} \cdot x^{\frac{11}{21}} \quad \text{למשל:}$$

$$\text{הערה:} \quad \text{לא יודעים לגזור פונקציה כמו } (x^2+7)^{100}, \quad (x+1)^{x+2}$$

נגזרות של פונקציות מורכבות (כלל השרשרת - Chain Rule)

http://en.wikipedia.org/wiki/Chain_rule

http://he.wikipedia.org/wiki/כלל_השרשרת

נניח ש- f מוגדרת בסביבת a וגזירה ב- a

ו- g מוגדרת בסביבת $b = f(a)$ וגזירה ב- b .

אז $g \circ f$ גזירה ב- a ו- $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$

$$\text{הסבר:} \quad (g \circ f)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

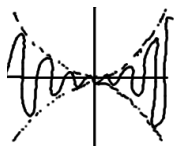
$$\text{בגלל רציפות } f(x) \rightarrow f(a)$$

$$= g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

הערה:

ההסבר הנ"ל טוב כאשר יש קטע פתוח שביב a שבו $f(x) \neq f(a)$ לכל x .

אבל הוא לא טוב במקרים אחרים, למשל:



$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

גזירה ב- $a=0$ אבל בכל קטע פתוח המכיל את 0 יש נקודה $x \neq 0$

שבה $f(x)=0$ למשל $x = \frac{1}{2\pi n}$ מסריק גדול.

הוכחה:

מאחר ש- g גזירה ב- $f(a)=b$ לפי הגרסה השנייה להגדרת הנגזרת,

קיימת פונקציה $\alpha(y)$ כך ש- $\lim_{y \rightarrow b} \alpha(y) = 0$

וכך ש- $g(y) = g(b) + g'(b)(y-b) + \alpha(y)(y-b)$

(g חייבת להיות מוגדרת בקטע פתוח J המכיל את b)

f רציפה ו- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = b$

לכן יש קטע פתוח I_a כך שלכל $x \in I_a$

$f(x)$ יהיה קרוב ל- b למשל ימצא ב- J)

לכן לכל $x \in I_a$ אפשר לבחור $y = f(x)$

y מייצג כל ערך ב- J ו- $f(x)$ שייך ל- J .

לכן $g(f(x)) = g(b) + g'(b)(f(x)-b) + \alpha(f(x))(f(x)-b)$

לכן $g(f(x)) - g(b) = g'(b)(f(x)-b) + \alpha(f(x))(f(x)-b)$

לכן אם נחלק את שני האגפים ב- $x-a$:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} = g'(f(a)) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \alpha(f(x)) \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$$

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

דוגמה:

$$\left[\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right]' = \square$$

$$g(x) = \ln x \quad f(x) = x + \sqrt{a+x^2}$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \times (x + \sqrt{1+x^2})' = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} (1 + [(1+x^2)^{\frac{1}{2}}])'$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left[1 + \frac{1}{2} (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} (1+x^2)' \right] = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(1 + \frac{\frac{1}{2} \times 1}{\sqrt{1+x^2}} 2x \right)$$

$$= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\left[\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right]' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{לכן}$$

<u>הערות:</u>	$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$	לזכור בע"פ.
---------------	---	--	-------------

שיעור השלמה (27.12.09)

(רב תודות לנעה בן-צבי)

שימושים של כלל השרשרת

תרגיל: לחשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = e^{\sqrt{1+\ln(1+\tan x)}}$

הפונקציה החינוצית במקרה זה היא e^x וידוע כי $(e^x)' = e^x$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \underbrace{e^{\sqrt{1+\ln(1+\tan x)}}}_{\substack{\text{לאחר הצבת הפונקציה} \\ \text{הפנימית במקום } x}} \cdot \underbrace{\left[\sqrt{1+\ln(1+\tan x)} \right]'}_{\substack{\text{כפל בנגזרת הפנימית של } x}} \\
 &= \underbrace{e^{\sqrt{1+\ln(1+\tan x)}}}_{\substack{\text{פונקציה} \\ \text{חיצונית חדשה}}} \cdot \frac{1 \cdot [1+\ln(1+\tan x)]'}{2\sqrt{1+\ln(1+\tan x)}} \\
 &= e^{1+\ln(1+\tan x)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+\ln(1+\tan x)}} \cdot \frac{1}{1+\tan(x)} \cdot (1+\tan x)' \\
 &= e^{1+\ln(1+\tan x)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+\ln(1+\tan x)}} \cdot \frac{1}{1+\tan(x)} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}
 \end{aligned}$$

טענה: $x^{\frac{m}{n}}$, כאשר n אי-זוגי, לכל x אם $\frac{m}{n} > 1$

וגזירה לכל $x \neq 0$ אם $\frac{m}{n} < 1$, והנגזרת מתקיימת $\left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}$

הוכחה: נסמן $y = x^{\frac{m}{n}}$

ידוע כי $y = x^a$ לכל $x > 0$ לכן הפונקציה $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ גזירה לכל $x > 0$.

מאחר ש- $(-x)^{\frac{1}{n}} = -(x)^{\frac{1}{n}}$ כי n הוא אי-זוגי, נובע ש- $x^{\frac{1}{n}}$ גזירה לכל $x \neq 0$

כהרכבה של פונקציות גזירות: $f(x) = x^{\frac{1}{m}}$ ו- $g(x) = x^m$, m שלם.

לכן $y = x^{\frac{m}{n}}$ גזירה לכל $x \neq 0$

ולכן $y^n = x^m$ (כאשר y פונקציה של x)

המשך בדף הבא...

$$y^n = x^m$$

נגזור את שני האגפים כפונקציה של x:

$$n y^{n-1} (y)' = m x^{m-1}$$

$$(y)' = \frac{m}{n} \frac{x^{m-1}}{y^{n-1}} \quad \text{לכן} \quad (x \neq 0 \text{ לכל})$$

$$\frac{m}{n} \frac{x^{m-1}}{y^{n-1}} = \frac{m}{n} \frac{x^{m-1}}{y^n} \cdot y = \frac{m}{n} \frac{x^{m-1} \cdot x^{\frac{m}{n}}}{x^m} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}$$

$$\left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1} \quad \text{כלומר}$$

כאשר $x=0$, אפשר להוכיח לפי הגדרת הנגזרת

ש- $y = x^{\frac{m}{n}}$ גזירה כאשר $\frac{m}{n} - 1 > 0$ ו- $y'(0) = 0$, ולכן הנוסחה עדיין תקפה.

כאשר $\frac{m}{n} - 1 < 0$ קבל כי הנגזרת לא קיימת. מוכיחים בעזרת הגזרת הנגזרת.

לסיכום: הביטוי $(x^a)' = ax^{a-1}$ תקף לכל a ולכל x שעבורו שני האגפים מוגדרים.

תרגיל: לחשב את x^x כאשר $x > 0$

פתרון: לשים לב כי $(x^x)' \neq x \cdot x^{x-1}$ - כי זו לא פונקציה חזקה (כי המעריך משתנה).

$$\begin{aligned} (x^x)' &= (e^{\ln x^x})' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' \\ &= e^{\ln x} \left(\underbrace{\ln x}_{\text{נגזרת של מכפלה פונקציות x ו- \ln x}} + x \cdot \frac{1}{x} \right) = e^{\ln x} (\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1) \end{aligned}$$

דרך נוספת:

$$\ln y = x \ln x \quad \text{נסמן} \quad y = x^x \quad \text{ואז} \quad \ln y = x \ln x$$

אז $y = e^{x \ln x}$ ולכן y גזירה כהרכבה של גזירות, וגם $\ln y$ גזירה.

יגזור את שני האגפים לפי x. y היא פונקציה של x.

$$(\ln y)' = (x \ln x)'$$

↓

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln x + 1$$

$$y' = y (\ln x + 1) \quad \text{לכן}$$

שזה למעשה $y' = x^x (\ln x + 1)$, אותו הביטוי שקיבלנו בדרך 1.

סימנים

אם f פונקציה של x , מסמנים את הנגזרת של f כפונקציה של x כך: $\frac{df}{dx}$

למשל: אם $f(x) = x^3$ אז $\frac{df}{dx} = 3x^2$

אם x הוא בעצמו פונקציה של t , למשל $x = 1 + 2t^3$

אז $f(x) = (1 + 2t^3)^3 = h(t)$ פונקציה של t .

לכן $\frac{dh}{dt} = \underbrace{3(1+2t^3)^2 \cdot 6t^2}_{h(t)'} = \underbrace{3(x)^2}_{f(x)'} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$

דוגמה: $x = 1 + 2t^3$ $y = 3t^2 - 1$

המשתנה t מבטיח כי y היא פונקציה סתומה של x .

ניתן לחשב את $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{6t}{6t^2} = \frac{1}{t}$$

בדיקה: נבודד את t מתוך משוואת x :

$$t^3 = \frac{x-1}{2} \quad \text{לכן} \quad t = \sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}$$

נציב במשוואת y :

$$y = 3t^2 - 1 = 3\left(\frac{x-1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1$$

$$y' = \left(3\left(\frac{x-1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right)' = 3 \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{x-1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{x-1}{2}\right)' = \left(\frac{x-1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{t}$$

$\frac{dy}{dx}$
גזירה בכל
מקום שבו y
גזירה, כלומר
לכל $x \neq 1$

נכון לכל $t \neq 0$

נגזרות של פונקציות הפיכות

הסבר: נניח כי $f: I \rightarrow J$ קטעים, ו- f חח"ע ועל.

$$f \text{ הפיכה ו- } f^{-1}: J \rightarrow I. \quad y \xrightarrow{f^{-1}} x \quad x \xrightarrow{f} y$$

אם (x, y) נקודה על הגרף של f אז (y, x) נקודה על הגרף של f^{-1} .
לכן הגרף של f^{-1} הוא שיקוף של הגרף של f ביחס לישר $y=x$.

משפט: אם $f: I \rightarrow J$ רציפה והפיכה, גם $f^{-1}: J \rightarrow I$ רציפה.

הערה: אם f ו- g הפיכות זו לזו * $g(f(x))=x$ לכל $x \in I$
 $f(g(y))=y$ לכל $y \in J$

נגזור את * בשני אגפיו: $g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$

$$\text{ולכן } g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \text{ כאשר } y = f(x) \text{ ובנהחה ש- } g' \text{ גזירה ו- } f'(x) \neq 0$$

משפט: נניח כי $f: I \rightarrow J$ (קטעים פתוחים) ו- f הפיכה וגזירה בכל נקודה של I .
אזי לכל $a \in I$ שבה $f'(a) \neq 0$ מתקיים f^{-1} גזירה ב- $f(a)$ והנגזרת

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

הוכחה: לפי הגדרת הנגזרת נסמן $b = f(a)$

$$\lim_{y \rightarrow b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{\substack{y \rightarrow b \\ y = f(x)}} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(a))}{f(x) - f(a)} \quad *$$

אם $y \rightarrow b$ אז $f(x) \rightarrow f(b)$

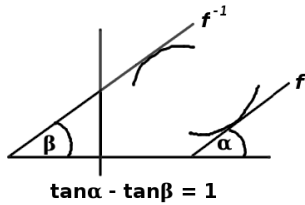
אז $f^{-1}(y) \rightarrow f^{-1}(b)$ (כי f רציפה, כי היא גזירה, ולכן גם f^{-1} רציפה)

כלומר $f^{-1}(f(x)) \rightarrow f^{-1}(f(a))$ ולכן $x \rightarrow a$

$$* = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}} = \frac{1}{\underbrace{f'(a)}_{\substack{\text{נכון כי} \\ f'(a) \neq 0}}} \quad \text{ולכן}$$

שיעור 11-א (29.12.09)

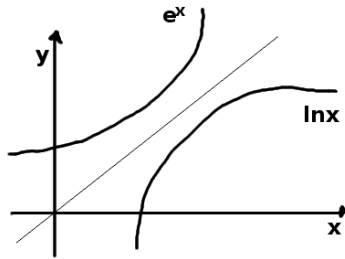
(רב תודות לנעה בן-צבי)



הוכחנו שאם $f: I \rightarrow J$ גזירה בקטע פתוח I והפיכה

תזכורת:

אז גם $f^{-1}: J \rightarrow I$ גזירה ו- $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ כאשר $y = f(x)$



$f(x) = e^x$ גזירה והפיכה בקטע $(-\infty, \infty)$

דוגמה:

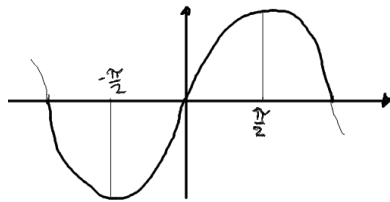
$f: (0, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty)$ אז $f^{-1}: (-\infty, \infty) \rightarrow (0, \infty)$

ולפי המשפט הקודם: $f^{-1}(x) = \ln x$

$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ לכל $y > 0$ כאשר $y = f(x)$

לכן $(\ln)'(y) = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$

פונקציות טריגונומטריות הפיכות



$\sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ לא הפיכה כי היא לא חח"ע.

בשים לב:

אבל $\sin[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ היא הפיכה.

הפונקציה ההפכית ל- $\sin[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ היא $\arcsin[-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

הגדרה:

למשל $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

$\sin[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ היא גזירה בקטע $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

לכן $\arcsin[-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ גזירה בקטע $[-1, 1]$

ומתקיים, כאשר $y = \sin x$, ש- $x = \arcsin y$.

$$(arcsiny)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos(\arcsiny)} \quad *$$

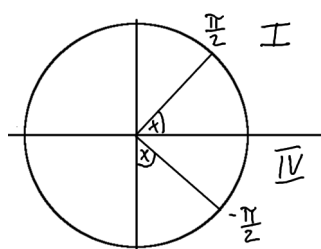
$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ בקטע $\cos \neq 0$ $\nearrow$ זווית בין $-\frac{\pi}{2}$ ל- $\frac{\pi}{2}$

המשך בדף הבא...

ידוע כי $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

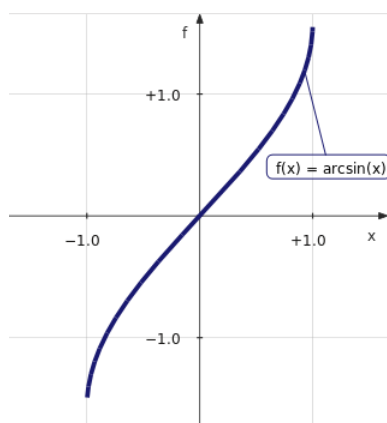
לכן $\cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x}$ או $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

במקרה שלנו $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ לכן $\cos x > 0$ ולכן $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$



נמשיך מ-*

$$\frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$



$\arcsin[-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

מסקנה:

גזירה לכל $-1 < x < 1$

ו- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

נובע מכאן ש-

$\lim_{x \rightarrow 1^-} (\arcsin x)' = \infty$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} (\arcsin x)' = \infty$

הפונקציה $\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ היא הפיכה

הערה:

$\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ היא הפונקציה ההפכית ל- $\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$

הגדרה:

$\arccos x$ גזירה לכל $-1 < x < 1$ ו- $(\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$

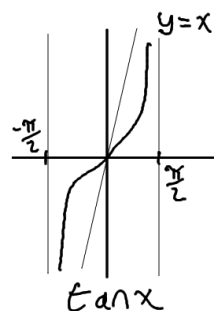
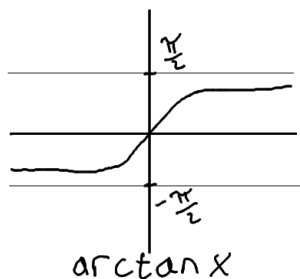
טענה:

$\tan: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ היא הפיכה.

הערה:

$\arctan: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ היא הפונקציה ההפכית ל- $\tan: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$

הגדרה:



נחשב את הנגזרת של $\arctan$:

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0 \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \quad \text{הקפונציה } \tan \text{ גזירה ו-}$$

לכן לכל $y \in \mathbb{R}$ $\arctan(y)$ גזירה, כאשר $y = \tan x$ ו-

$$(\arctan)'(y) = \frac{1}{(\tan x)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x = \cos^2(\arctan y)$$

נביע את $\cos$ כפונקציה של $\tan$: $\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$, נוסיף 1:

$$\cos^2 x = \frac{1}{\tan^2 x + 1} \quad \text{ולכן} \quad \tan^2 x + 1 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\cos^2(\arctan y) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan y)} = \frac{1}{1 + y^2} \quad \text{מכאן}$$

$$y \in \mathbb{R} \quad \text{לכל} \quad (\arctan)'(y) = \frac{1}{1 + y^2} \quad \text{מסקנה:}$$

לסיכום:

$$-1 < x < 1 \quad \text{לכל} \quad \begin{cases} (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$$

$$x \in \mathbb{R} \quad \text{לכל} \quad \begin{cases} (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \\ (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \end{cases}$$

נקודות קיצון מקומי של פונקציה

הגדרה:

1. נראה כי נקודה a היא נקודה **מינימום מקומי** של f אם קיים קטע פתוח I המכיל את a כך ש- $f(x) \geq f(a)$ לכל $x \in I$

2. נראה כי נקודה a היא נקודה **מקסימום מקומי** של f אם קיים קטע פתוח I המכיל את a כך ש- $f(x) \leq f(a)$ לכל $x \in I$

משפט פרמה (Fermat's Theorem)

[http://en.wikipedia.org/wiki/Fermat's_theorem_\(stationary_points\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Fermat's_theorem_(stationary_points))

http://he.wikipedia.org/wiki/לנקודות_קיצון

משפט: אם ל- f יש נקודת קיצון מקומי בנקודה a , ואם f גזירה בנקודה a , אז $f'(a)=0$

הוכחה:

נניח למשל כי a נקודת מקסימום מקומי.

כלומר, קיים קטע פתוח I שמכיל את a כך ש- $f(x) \leq f(a)$ לכל $x \in I$.
כמו כן, נניח כי f גזירה ב- a .

צ"ל כי $f'(a)=0$.

כלומר, ש- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ קיים ושווה ל-0.

לכל $a > x$ ב- I מתקיים $f(x)-f(a) \leq 0$ (כי $f(x) \leq f(a)$)

וגם $x-a < 0$ ולכן $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$ כי גבול של פונקציה אי-שלילית הוא אי-שלילי

מצד שני, לכל $a < x$ ב- I מתקיים $x-a > 0$ אבל עדיין $f(x)-f(a) \leq 0$

לכן $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$ (גבול של פונקציה לא חיובית הוא לא חיובי)

מכאן ש- $f'(a) \leq 0$ וגם $f'(a) \geq 0$ ולכן $f'(a) = 0$

מסקנה חשובה: אם ל- f יש נקודת קיצון מקומי בנקודה a

אזי $f'(a)=0$ או f לא גזירה ב- a .

הגדרה:

נאמר כי נקודה c היא **נקודה קריטית** של פונקציה f

אם $f'(c)=0$ או f לא גזירה ב- c .

מקסמה:

(ממשפט פרמה)

נקודת הקיצון המקומי של הפונקציה נמצאות בין הנקודות הקריטיות שלה.

שיעור 11-ב (31.12.09)

(רב תודות לנעה בן-צבי)

קיצון מוחלט

הגדרה: נניח כי f היא פונקציה המוגדרת בתחום D . נאמר ש-

1. $a \in D$ היא נקודת מינימום מוחלט של f ב- D אם $\forall x \in D, f(a) \leq f(x)$

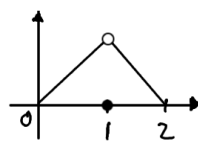
2. $b \in D$ היא נקודת מינימום מוחלט של f ב- D אם $\forall x \in D, f(b) \leq f(x)$

דוגמאות:

1. $0 \leq x \leq 1 \quad f(x) = x$

$x=0$ נקודת מינימום מוחלט של f בקטע $[0,1]$

$x=1$ נקודת מקסימום מוחלט של f בקטע $[0,1]$



$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 2-x & 1 < x < 2 \\ 0 & 1 \end{cases} \quad 2.$$

הנקודות $x=0,1$ הן נקודות מינימום מוחלט.

אין מקסימום מוחלט. בעיה של חוסר רציפות.

3. $0 < x < 1 \quad f(x) = x$

אין מינימום/מקסימום מוחלט. בעיה של קטע לא סגור.

משפטי ויירשטראס (Extreme Value Theorem)

http://en.wikipedia.org/wiki/Extreme_value_theorem

http://he.wikipedia.org/wiki/משפטי_ויירשטראס

משפט:

אם f רציפה בקטע סגור

אז f מקבלת את המינימום ואת המקסימום המוחלטים שלה בקטע.

במילים אחרות:

אם $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה

אז קיימים $c, d \in [a, b]$ כך ש- $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$ לכל $x \in [a, b]$

הערה:

נניח ש- f מוגדרת בקטע סגור $[a, b]$

ונניח שיש ל- f נקודת מינימום מוחלט ב- $[a, b]$. יש שתי אפשרויות:

1. $c = a$ או $c = b$, כלומר c נקודת קצה.

2. $c \neq a$ וגם $c \neq b$, כלומר c לא נקודת קצה.

אז $\forall x \in (a, b) \quad f(c) \leq f(x)$ ואז c הוא נקודת מינימום מקומי.

מסקנה:

אם f מוגדרת בקטע סגור אז כל נקודת קיצון מוחלט

היא נקודת קצה או נקודה קריטית.

השיטה למציאת קיצון מוחלט לפונקציה רציפה בקטע סגור

1. לוודא כי הפונקציה **רציפה** וקטה **סגור**.
2. מוצאים את כל הנקודות הקריטיות של f בקטע.
3. מציבים ב- f את כל **הנקודות הקריטיות** וגם את **קצות הקטע**.
4. הנקודות שבן התקבל ב-(3) ערך גדול ביותר הן המקסימום המוחלט. הנקודות שבן התקבל ב-(3) ערך קטן ביותר הן המינימום המוחלט.

שאלה: מצא את ערכי הקיצון המוחלט של $f(x) = 4x^{\frac{7}{3}} - 7x^{\frac{1}{3}} + 1$ ב- $[-1, 1]$.

פתרון: f רציפה בקטע $[-1, 1]$
 לכן לפי משפט ווירשטראס יש לה מינימום ומקסימום מוחלט בקטע
 שעשויים להתקבל בקצות או בנקודות קריטיות.

נחפש את הנקודות הקריטיות: (הנקודות שבהן הנגזרת מתאפס או לא קיימת).

$$\forall x \neq 0 \quad f'(x) = 4 \cdot \frac{7}{3} x^{\frac{4}{3}} - 7 \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$$

$x=0$ עשויה להיות נקודה קריטית (כיוון שהנוסחה שלעיל נכונה רק עבור $x \neq 0$, ויש לבדוק גזירות ב-0 לפי הגדרת הנגזרת, במידה ורוצים לראות אם זו נקודה קריטית) אך לא נבדוק האם היא נקודה קריטית כי זה לא מתבקש בתרגיל, אלא רק נבדוק האם היא מינימום / מקסימום.

$$\text{לכן לכל } x \neq 0 : f'(x) = \frac{7}{3} x^{-\frac{2}{3}} (4x^2 - 1) = 0$$

$$\text{כאשר } 4x^2 - 1 = 0 \text{ כלומר } x = \frac{1}{2} \text{ או } x = -\frac{1}{2}$$

כעת עלינו לבדוק את ערכי f בנקודות החשובות: $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1$
 רק שם יתכן קיצון מוחלט:

$$f(1) = 4 \cdot (-1)^{\frac{7}{3}} - 7(-1)^{\frac{1}{3}} + 1 = -4 + 7 + 1 = 4 \quad f(-1) = 4 - 7 + 1 = -2$$

$$f(0) = 1 \quad \text{נפשט את } f : f(x) = x^{\frac{1}{3}}(4x^2 - 7) + 1$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}(1 - 7) + 1 = -\frac{6}{\sqrt[3]{2}} + 1 \stackrel{\frac{6}{\sqrt[3]{2}} = 3}{\leq} -2 \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{6}{\sqrt[3]{2}} + 1 > 3 + 1 = 4$$

לכן $x = -\frac{1}{2}$ היא נקודת מקסימום ו- $x = \frac{1}{2}$ היא נקודת מינימום.

משפט רול (Rolle's Theorem)

http://en.wikipedia.org/wiki/Rolle's_theorem

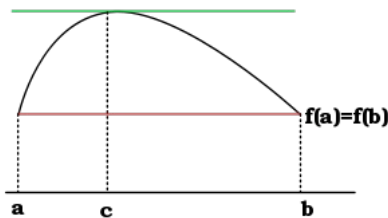
http://he.wikipedia.org/wiki/משפט_רול

משפט:

נניח כי f פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$ וגזירה בקטע (a, b) אם $f(a) = f(b)$ אז קיימת נקודה $c \in (a, b)$ כך ש- $f'(c) = 0$

הוכחה:

אם f קבוע בקטע $[a, b]$ אז $\forall x \in (a, b) f'(x) = 0$ ולכן המשפט מתקיים.



נניח כי f לא קבועה ב- $[a, b]$ מאחר ש- f רציפה ב- $[a, b]$,

ממשפט ווירשטראס נובע כי יש לה מינימום וגם מקסימום מוחלט בקטע. אם שניהם מתקבלים בקצות אז מפני ש- $f(a) = f(b)$ נקבל כי $f(x) = f(a) = f(b)$ לכל x וזו סתירה.

לכן קיימת נקודה $c \neq a, b$ שבה יש ל- f קיצון מוחלט.

אבל אז $c \in (a, b)$ לכן היא נקודה קיצון מקומי.

מאחר ש- f גזירה ב- c , ממשפט פרמה נקבל כי $f'(c) = 0$. מ.ש.ל.

מסקנה:

אם f רציפה וגזירה בקטע I אז בין כל שני פתרונות של המשוואה $f(x) = 0$ יש לפחות פתרון אחד ל- $f'(x) = 0$

הוכחה:

אם x_1, x_2 פתרונות למשוואה $f(x) = 0$ אז $f(x_1) = f(x_2) = 0$

אז f רציפה ב- $[x_1, x_2]$ וגזירה ב- (x_1, x_2)

ולכן קיים $c \in (x_1, x_2)$ כך ש- $f'(c) = 0$. מ.ש.ל.

דוגמה:

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

אז למשוואה $P(x) = 0$ יש פתרונות x_1, x_2, x_3 כך ש-

$$1 < x_1 < 2 \quad 2 < x_2 < 3 \quad 3 < x_3 < 4$$

משפט:

אם $P(x)$ פולינום ממעלה n
אז למשוואה $P(x)=0$ יש לכל היותר n פתרונות שונים.

הוכחה:

נניח בדרך השלילה שיש ל- P $n+1$ שורשים

(נניח כי $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$, $a_n \neq 0$)

אז ל- $P'(x)$ יש לפחות n שורשים שונים.

ול- $P''(x)$ יש לפחות $n-1$ שורשים

$\vdots$

אז לנגזרת ה- n -ית $P^{(n)}(x)$ יש לפחות שורש 1.

$$P^{(n)}(x) = n! \underbrace{a_n}_{\neq 0} \neq 0 \quad \text{אבל}$$

וזו סתירה. לכן ל- $P(x)$ יש לכל היותר n שורשים.

משפט הערך הממוצע של לגרנז'

http://en.wikipedia.org/wiki/Mean_value_theorem

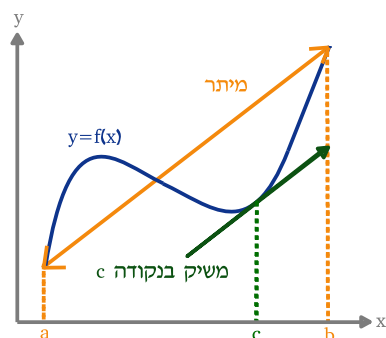
[משפט_הערך_הממוצע_של_לגרנז](http://he.wikipedia.org/wiki/משפט_הערך_הממוצע_של_לגרנז)

משפט:

אם f רציפה ב- $[a, b]$ וגזירה ב- (a, b)

אז קיימת נקודה $c \in (a, b)$ כך ש- $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

או לחילופין קיימת נקודה $c \in (a, b)$ כך ש- $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$



$$\left(\frac{\text{הערך הממוצע}}{\text{של הפונקציה}} \right) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

הוכחה:

נסתכל על הפונקציה:

$$g(x) = f(x) - \left((a, f(a)), (b, f(b)) \right) \text{ הישר שעובר דרך}$$

$$\text{כלומר } g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

אז g רציפה ב- $[a, b]$ וגזירה ב- (a, b) , כהרפש של פונקציות עם אותן התכונות.
לכן $g(a)=0$ ו- $g(b)=0$ ולכן לפי משפט קול, קיים $c \in (a, b)$ כך ש- $g'(c)=0$.

$$\text{אבל } g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\text{לכן מתוך } g'(x)=0 \text{ נובע כי } f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \text{מ.ש.ל.}$$

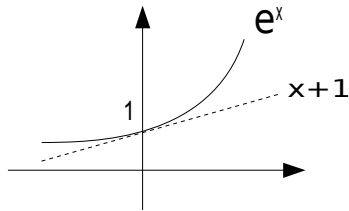
שיעור 12-א (05.01.10)

(רב תודות לנעה בן-צבי)

תזכורת: משפט הערך הממוצע של לגרנז': אם f רציפה ב- $[a,b]$ וגזירה ב- (a,b)

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) \quad \text{כך ש-} c \in (a,b) \quad \text{אז קיים}$$

שימושיים



1. לכל $x \in (0, \infty)$ מתקיים $e^x > 1 + x$

נסמן $f(x) = e^x$.

אז לכל $x > 0$ f רציפה בקטע $[0, x]$ וגזירה ב- $(0, x)$.

לכן לפי משפט לגרנז', לכל x שכזה קיים $c_x \in (0, x)$ כך ש-

$$f(x) - f(0) = f'(c_x)(x - 0) \quad \text{כלומר} \quad e^x - e^0 = e^{c_x} \cdot x \quad \text{לכן} \quad e^x - 1 = e^{c_x} \cdot x.$$

מפני ש- $c_x > 0$ מתקיים $e^{c_x} > 1$ לכן $e^x - 1 = e^{c_x} \cdot x > x$

לכן $e^x > x + 1$ לכל $x > 0$.

2. לכל $x > 0$ מתקיים $\ln(1+x) < x$

נסמן $f(x) = \ln(1+x)$.

אז $\forall x > 0$, f רציפה בקטע $[0, x]$ וגזירה ב- $(0, x)$

לפי משפט לגרנז', לכל x שכזה

$$f(x) - f(0) = f'(c_x)(x - 0) \quad \text{כך ש-} c_x \in (0, x) \quad \text{קיים}$$

$$\ln(1+x) = \underbrace{\left(\frac{1}{1+c_x} \right)}_{\substack{\text{מספר קטן מ-1} \\ \text{כי } c_x > 0}} \cdot x \quad \text{כלומר} \quad \ln(1+x) < x \quad \text{לכן} \quad \leq$$

הערה: ראינו כי אם f קבועה בתחום D שהיא איחוד של קטעים פתוחים

אז גזירה ו- $f'(x) = 0$ לכל $x \in D$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 1 < x < 2 \\ 2 & 2 < x < 3 \end{cases} \quad \text{נקח} \quad \text{המשפט ההפוך לא נכון.}$$

f גזירה ב- $(1,2) \cup (2,3)$ ו- $f'(x) = 0$ לכל x בתחום.

אבל f לא קבוע.

משפט:

אם f רציפה בקטע I וגזירה בכל נקודה שפנימית ל- I ,
ואם $f'(x)=0$ לכל נקודה פנימית ל- I , אז f קבוע ב- I .

I יכול להיות פתוח, סגור, חצי פתוח או קרן.

הוכחה:

נבחר נקודה $a \in I$.
אז לכל $x \in I$, f רציפה בקטע הסגור $[a, x]$ או $[x, a]$ (שחלקי ל- I בשני המקרים)
בנוסף, f גזירה ב- (a, x) או ב- (x, a) (כי כל נקודה שבין a ל- x היא פנימית ל- I)
לכן $f'(c)=0$ לכל c שבין a ל- x .
לפי משפט לגרנז', קיים c בין a ל- x כך ש- $f'(c)=0$ $(x-a)f'(c)=0$ $f(x)-f(a) =$
מכאן $f(x)=f(a)$. זה נכון לכל $x \in I$ ולכן f קבוע ב- I .

תרגיל:

הוכח כי לכל $x \in [-1, 1]$ מתקיים $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

פתרון:

הפונקציה $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ היא רציפה בקטע $[-1, 1]$
כי $\arcsin x$ ו- $\arccos x$ כהפוכיות של פונקציות רציפות.
בנוסף, $f(x)$ גזירה בקטע $(-1, 1)$ ומתקיים לכל $-1 < x < 1$:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

לכן לפי משפט הקודם f קבוע בקטע הסגור $[-1, 1]$
מכאן שלכל $x \in [-1, 1]$: $f(x) = f(0) = \arcsin(0) + \arccos(0) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

הערה:

נניח כי f ו- g מקיימות את תנאי משפט לגרנז' בקטע $[a, b]$
אז בהנחה ש- $g(b) \neq g(a)$: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{f'(d)}$ (לאחר צימצום ב- $(b-a)$)
לא מובטח כי $c=d$.

הכללה של קושי למשפט לגרנז' (Cauchy's Mean Value Theorem)

http://en.wikipedia.org/wiki/Mean_value_theorem#Cauchy's_mean_value_theorem

[משפט_הערך_הממוצע_של_קושי](http://he.wikipedia.org/wiki/משפט_הערך_הממוצע_של_קושי)

משפט: נניח כי f ו- g רציפות ב- $[a,b]$ וגזירות ב- (a,b) ו- $g'(x) \neq 0$ לכל $x \in (a,b)$

$$\text{אז קיימת נקודה } c \in (a,b) \text{ כך ש-} \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

הערות:

1. אם $g'(x) \neq 0$ לכל $x \in (a,b)$ אז $g(b) \neq g(a)$

כי אם נניח ש- $g(a) = g(b)$

אז לפי משפט רול קיימת $c \in (a,b)$ כך ש- $g'(c) = 0$ וזו סתירה לנתון.

2. משפט לגרנז' מתקבל כמקרה פרטי של משפט קושי.

בוחרים $g(x) = x$

הוכחה:

$$\text{נסמן } h(x) = (f(b)-f(a)) \cdot g(x) - (g(b)-g(a)) \cdot f(x)$$

אז h רציפה ב- $[a,b]$ וגזירה ב- (a,b) (כי ל- f ו- g יש תכונות כאלו)

$$\text{לכן } h(a) = f(b) \cdot g(a) - g(b) \cdot f(a)$$

$$h(b) = -f(a) \cdot g(b) + g(a) \cdot f(b)$$

$$\text{כלומר } h(b) = h(a)$$

ולכן לפי משפט רול קיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך ש- $h'(c) = 0$

$$\text{ולכן } h'(c) = (f(b)-f(a)) \cdot g'(c) - (g(b)-g(a)) \cdot f'(c) = 0$$

ומכאן נקבל את הנוסחה של קושי.

כלל לופיטל (L'Hôpital's rule) - המקרה " $\frac{0}{0}$ "

http://en.wikipedia.org/wiki/L'Hôpital's_rule

http://he.wikipedia.org/wiki/כלל_לופיטל

טענה: נניח כי:

1. f ו- g גזירות בקטע פתוח I המכיל את a , למשל אולי ב- a .

2. $g'(x) \neq 0$ לכל $x \in I$

3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

4. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (עשוי להיות סופי או אינסופי)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad \text{אז}$$

הוכחה:

נניח כי $x > a, x \in I$

$$G(t) = \begin{cases} g(t) & t \in (a, x] \\ 0 & t = a \end{cases} \quad F(t) = \begin{cases} f(t) & t \in (a, x] \\ 0 & t = a \end{cases} \quad \text{נסמן}$$

אז F, G רציפות ב- $[a, x]$, גזירות ב- (a, x) ו- $g'(t) \neq 0$ ב- (a, x) . מכאן שהפוקנציות F, G מקיימות את כל תנאי משפט קושי ב- $[a, x]$.

$$\frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(c_x)}{G'(c_x)} \quad \text{לכן קיימת נקודה } a < c_x < x \text{ כך ש-}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \quad \text{כלומר}$$

השיוויון הנ"ל נכון לכל $x > a, x \in I$ (לכל x ישנו c_x מתאים) כאשר x שואף ל- a , גם c_x שואף ל- a כי $a < c_x < x$.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{\substack{c_x \rightarrow a \\ \text{שואף ל-} a}} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = L \quad \text{לכן}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{הוכחה דומה נכונה גם עבור}$$

הערה:

מן ההוכחה הקודמת נובע שמותר להשתמש בכלל לופיטל גם לגבולות חד-צדדיים. הכלל נכון גם כאשר $x \rightarrow \infty$ או $x \rightarrow -\infty$.

משפט:

משפט דומה נכון למקרה " $\frac{\infty}{\infty}$ "

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} - \cos x}{x^4} \stackrel{\substack{''0'' \\ 0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x + \sin x}{4x^3} \stackrel{\substack{''0'' \\ 0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + \cos x}{\underbrace{12x^2}_{\frac{1 - \cos x}{x^2}}} = \frac{1}{12} \cdot \frac{(-1)}{2} = -\frac{1}{24} \quad 1.$$

נכון בתאי
שהגבול מימין קיים

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}}{(1 - \cos x)^2} \stackrel{\substack{''0'' \\ 0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+1} - 1 + x - x^2}{2(1 - \cos x) \sin x} = \leftarrow$$

יהיה קשה לבדוק בהמשך כי הנגזרות של המכנה לא מתאפסות בסביבת 0.

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}}{\left(\frac{(1 - \cos x)^2}{x^4} \right) \cdot x^4} \quad \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \text{ ידוע כי}$$

שואף ל- $\frac{1}{4}$ נחשב .
את הגבול של יתר ביטוי

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}}{x^4} \stackrel{\substack{''0'' \\ 0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^{-1} - 1 + x - x^2}{4x^3} \quad 2.$$

לופיטל

$$\stackrel{\substack{''0'' \\ 0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(x+1)^{-2} + 1 - 2x}{12x^2} \stackrel{\substack{''0'' \\ 0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(x+1)^{-3} - 2}{24x}$$

לופיטל

$$\stackrel{\substack{''0'' \\ 0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-6(x+1)^{-4}}{24} = -\frac{1}{4}$$

לופיטל

$$\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = -1 \quad \text{ולכן הגבול המקורי הוא } -1$$

הערה: גם בחישובי גבולות מהצורה $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{(\sin x)^k}$ כדאי לרשום $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\left(\frac{\sin x}{x} \right)^k} \cdot x^k$

שיעור 12-ב (07.01.10)

(רב תודות לנעה בן-צבי)

חישובים נוספים של כללי לופיטל

$$1. \quad \alpha > 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} \stackrel{''\infty/\infty''}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \dots \stackrel{k \text{ פעמים}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}} = * \quad \text{לופיטל}$$

ניתן להמשיך כך כל עוד $\alpha - k > 0$, k טבעי. נניח כעת כי $\alpha - k \leq 0$ ולכן

$$* = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\underbrace{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}_{\text{מספר חיובי כי } \alpha > k}} \cdot e^x \underbrace{x^{k-\alpha}}_{\substack{\text{זו חזקה אי-שלילית של } x \\ \text{ולכן זהו גבול } \alpha \cdot x \text{ או } \alpha - 1}} = \infty$$

$$\text{מסקנה:} \quad \text{לכל } \alpha > 0 : \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \infty \quad \text{ולכן} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0$$

כלומר e^x שואפת ל- ∞ הרבה יותר מהר מכל חזקה של x .

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{''\infty/\infty''}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \quad \text{לופיטל}$$

$$3. \quad \alpha > 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{\ln(t^\alpha)}{t}}_{\substack{\text{נציב } t = x^\alpha \\ x \rightarrow t^\frac{1}{\alpha}}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\ln t}{t} = 0$$

$\ln x$ שואף ל- ∞ הרבה יותר לאט מכל חזקה חיובית של x . מסקנה:

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x \stackrel{0 \cdot \infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\substack{\text{שואף ל-} \infty \\ \text{לופיטל}}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 \quad \text{שואף ל-} -\infty$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x \stackrel{''0^0''}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^0 = 1$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\ln x}} \stackrel{''0^0''}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x^{\frac{1}{\ln x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{\ln x} \cdot \ln x} = e$$

מסקנה: המצב " 0^0 " לא מבטיח מראש דבר לגבי הגבול הנ"

או ולגבי הגבול " ∞^0 "

סיכום המבצים המיוחדים בחישובי גבולות

$$0^0, \infty^0, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty$$

תחומי עליה וירידה של פונקציה גזירה

משפט: אם f גזירה בקטע פתוח I , ואם $f'(x) > 0$ לכל $x \in I$ אז f **עולה** ממש ב- I (אם $x_1 < x_2$ ב- I אז $f(x_1) < f(x_2)$)

הוכחה: לכל $x_1, x_2 \in I$: $x_1 < x_2$. f רציפה ב- $[x_1, x_2]$ כי f גזירה ב- I ולכן רציפה ב- I .
כמו כן f גזירה בקטע (x_1, x_2) . מכאן לפי משפט לגרנז' קיימת נקודה $c \in (x_1, x_2)$ כך ש-
$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} > 0$$
 ולכן $f(x_2) > f(x_1)$.

משפט: אם f גזירה בקטע פתוח I ואם $f'(x) < 0$ לכל $x \in I$ אז f **יורדת** ממש ב- I (לכל $x_1, x_2 \in I$ אם $x_1 < x_2$ אז $f(x_1) > f(x_2)$)

משפט: אם f גזירה בקטע פתוח I אז:

1. אם $f'(x) \geq 0$ לכל $x \in I$ אז f מונוטונית עולה ב- I .
כלומר אם $x_1 < x_2$ אז $f(x_1) \leq f(x_2)$

2. אם $f'(x) \leq 0$ לכל $x \in I$ אז f מונוטונית יורדת ב- I .

דוגמה: $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2 \geq 0$

לכן לא מובטח מן המשפט הקודם כי f עולה ממש. אבל בכל זאת $f(x)$ עולה ממש ב- $\mathbb{R}$ למרות שהנגזרת שלה אינה חיובית בכל מקום.

משפט: נניח כי f רציפה בקטע I וגזירה בכל נקודה שפנימית ל- I .
כמו כן, נניח כי $f'(x) \geq 0$ לכל x שפנימית ל- I אבל f' לא מתאפסת בשום קטע פתוח חלקי ל- I , אז f **עולה ממש ב- I** .

הוכחה: בדף הבא...

הוכחה:

לכל $x_1, x_2 \in I$, f רציפה ב- $[x_1, x_2]$ וגזירה ב- (x_1, x_2)
 לכן לפי לגרנז' נקבל שוב $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ כלומר $f(x_1) \leq f(x_2)$.
 אם f לא עולה ממש אז קיימים x_1 ו- x_2 כך ש- $x_1 < x_2$ וכך ש- $f(x_1) = f(x_2)$.
 אז לכל $x_1 \leq t \leq x_2$ נקבל כי $f(x_1) \leq f(t) \leq f(x_2)$
 כלומר $f(t) = f(x_1)$ ולכן f קבועה ב- (x_1, x_2)
 אבל אז נקבל כי $f'(t) = 0$ לכל $t \in (x_1, x_2)$ וזו סתירה.
 מכאן ש- $f(x_1) < f(x_2)$ וזה נכון לכל $x_1 < x_2$ ב- I .
 כלומר f עולה ממש.

מסקנה:

אם $f'(x) \geq 0$ לכל $x \in I$ ואם f' מתאפסת רק במספר סופי של נקודות ב- I
 אז f עולה ממש ב- I .

דוגמה:

$$f(x) = x - \sin x \text{ עולה ממש ב- } \mathbb{R}$$

תרגיל:

$$f(x) = 64x^{\frac{7}{3}} - 7x^{\frac{1}{3}} \text{ מצא את כל תחומי העליה והירידה של}$$

תשובה:

f רציפה ב- $\mathbb{R}$ ומוגדרת ב- $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{64 \cdot 7}{3} x^{\frac{4}{3}} - \frac{7}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{7}{3} x^{-\frac{2}{3}} (64x^2 - 1) = \frac{7}{3} \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2} (64x^2 - 1)$$

$$f'(x) = 0 \text{ עבור } x = \frac{1}{8} \text{ ו- } x = -\frac{1}{8} \text{ גזירה בכל } x \neq 0.$$

x							
$f'(x)$	+	$-\frac{1}{8}$	-	0	-	$+\frac{1}{8}$	+
$f(x)$	↗		↘		↘		↗

נק' מקסימום מקומית $x = -\frac{1}{8}$

נק' מינימום מקומית $x = \frac{1}{8}$

$x = 0$ לא קיצום אך קריטי

נשים לב כי f' רציפה בכל אחד מן הקטעים:

$$\left(-\infty, -\frac{1}{8}\right), \left(-\frac{1}{8}, 0\right), \left(0, \frac{1}{8}\right), \left(\frac{1}{8}, \infty\right)$$

ו- f' לא מתאפסת באף אחד מן הקטעים הנ"ל.

המשך בדף הבא...

פונקציה רציפה בקטע שאינה מתאפסת בקטע, לא יכולה לשנות סימן.
 (כי אם הפונקציה f' תקבל ערכים בעלי סימנים מנוגדים באחד הקטעים הנ"ל
 אז בגלל הרציפות ומשפט ערך הביניים היא חייבת להתאפס שוב - סתירה).

לסיכום: על פי סימן של f' מקבלים כי:

$$f \text{ עולה ב- } \left(-\infty, -\frac{1}{8}\right) \text{ וגם ב- } \left(\frac{1}{8}, \infty\right) \text{ ויורדת ב- } \left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right).$$

משפט: אם f רציפה בקטע פתוח המכיל את הנקודה a וגזירה בקטע למעט אולי a עצמה
 אז אם a נקודה קריטית של f ואם f' משנה סימן ב- a
אז a נקודת קיצון של f .

הערה: בתנאים של המשפט שלעיל, אם a נקודת קיצון של f לא מובטח ש- f משנה
 סימן ב- a . כלומר, לא מובטח ש- f "עולה לפני a ויורדת אחר כך" או להפך.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} + 2x^2 & x \neq 0 \\ 0 & 0 \end{cases} \quad \text{דוגמה:}$$

f גזירה ב-0 (מקבלים $f'(0)=0$ מהגדרת הנגזרת)
 לכן f גזירה ב- $\mathbb{R}$. 0 היא נקודת מינימום מוחלט (ולכן גם מקומי) של f
 כי $f(x) = x^2 \left(\underbrace{\sin \frac{1}{x^2}}_{\geq 1} + 2 \right) \geq 0$ ו- $f(x)=0$ רק עבור $x=0$.

אבל אין שום קטע מהצורה $(a, 0)$, $a < 0$ שבו f יורדת
 ואין שום קטע מהצורה $(0, b)$, $b > 0$ שבו f עולה.

$$\forall x \neq 0 \quad f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x^2} + x^2 \cos \frac{1}{x^2} \left(\frac{-2}{x^3} \right) + 4x = 2x \left(\sin \frac{1}{x^2} + 2 \right) - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}$$

אז לכל $b > 0$ קיים n טבעי כך ש- $0 < \frac{1}{\sqrt{2n\pi}} < b$ וגם $0 < \frac{1}{\sqrt{2n\pi+\pi}} < b$

$$f' \left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}} \right) = \underbrace{\frac{2}{\sqrt{2n\pi}}}_{\text{מספר קטן}} \cdot 2 - \underbrace{2 \cdot \sqrt{2n\pi} \cdot \cos 2\pi n}_{\text{מספר גדול}} < 0 \quad \text{ו-} \quad f' \left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi+\pi}} \right) > 0 \quad \text{אבל}$$

לכן אין אף קטע פתוח מהצורה $(0, b)$ שבו f' חיובית.
 (ולא מהצורה $(a, 0)$ שבו f' שלילית).

שיעור 13-א (12.01.09)

קמירות וקערות של פונקציות

Concavity (קעירות) and Convexity (קמירות) of Functions

הגדרה:

1. נאמר שפונקציה גזירה f בקטע I הוא **קמורה** (Convex) אם f פונקציה **עולה** ב- I .
2. נאמר שפונקציה גזירה f בקטע I הוא **קעורה** (Concave) אם f פונקציה **יורדת** ב- I .

מסקנה: אם f גזירה פעמיים בקטע I אז

1. f קמורה אם ורק אם f'' חיובית ב- I .
2. f קעורה אם ורק אם f'' שלילית ב- I .

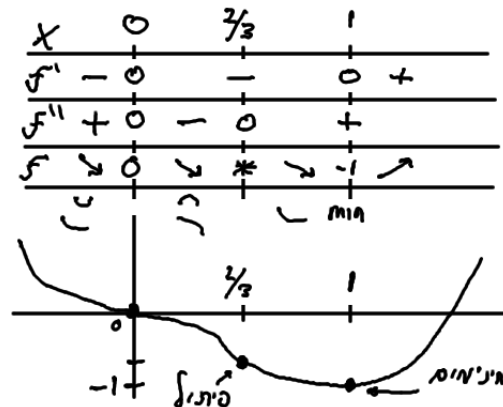
הגדרה: אם f רציפה ב- I והופכת מקבורה לקעורה או להפך התקודה $c \in S$ נאמר ש- c נקודת פיתול של f .

תרגיל: מצא את תחומי הקמורות וקביעות ואת נקודת הפיתול של $f(x) = 3x^4 - 4x^3$

תשובה: f גזירה לכל x ! $f'(x) = 12x^3 - 12x^2$
 $f''(x) = 36x^2 - 24x = 12x(3x - 2)$
לכן $f''(x) > 0$ לכל $x < 0$ ולכל $x > \frac{2}{3}$
 $f''(x) < 0$ לכל $0 < x < \frac{2}{3}$
ולכן f קמורה ב- $(-\infty, 0)$ וגם ב- $(\frac{2}{3}, \infty)$
קעורה ב- $(0, \frac{2}{3})$ ו- 0 ו- $\frac{2}{3}$ נקודות פיתול.

תרגיל (המשך): למצוא גם את תחומי העליה והירידה של f ולשרטט את הגרף שלה.

f מוגדרת רציפה וגזירה ב- $\mathbb{R}$ (פולינום), לכן $f'(x) = 12x^2(x-1)$



תרגיל: למצוא את נקודות הקיצון והפיתול של:

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{3}} & x < 1 \\ (2-x)^3 & x \geq 1 \end{cases}$$

תשובה: f מוגדרת לכל x ורציפה בכל x (בודקים בנפרד ב- $x=1$, לפי ההגדרה).
 f גזירה לכל $x < 1$, $x \neq 0$ (ב- $x=0$ אפשר להוכיח שהיא לא גזירה).
 כמו כן f גזירה לכל $x > 1$ (ב- $x=1$ צריך לבדוק לפי ההגדרה).

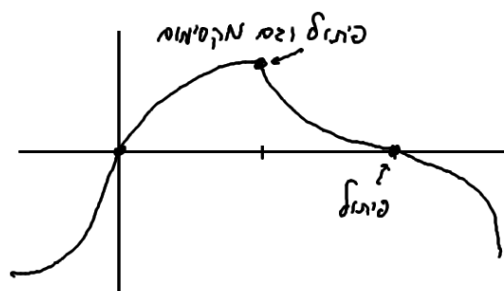
$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} & x < 1, x \neq 0 \\ -6(x-2) & x > 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} & x < 1, x \neq 0 \\ -3(x-2)^2 & x > 1 \end{cases}$$

x	0	1	2
f'	+	+	-
f''	+	-	+
f	↗	↘	↗

$$(x-2)^2 = (2-x)^2$$

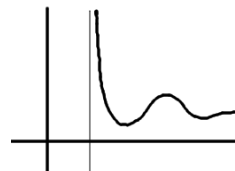
$$2(x-2) = 2(2-x)(-1)$$



אסימפטוטות

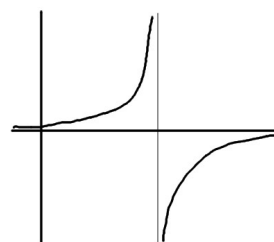
אסימפטוטה אנכית (Vertical asymptotes)

הגדרה: הישר $x=a$ הוא אסימפטוטה אנכית לגרף הפונקציה f אם לפחות אחד מהגבולות החד צדדים של f בנקודה a הוא אינסופי.



דוגמה:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-x} & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$$



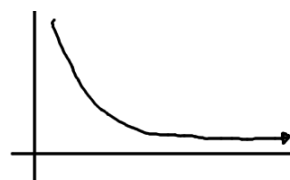
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$$

לכן הישר $x=2$ אסימפטוטה אנכית לגרף של f .
ישר זה חותך את הגרף הנקודה $(2,3)$.

הערה: אם f רציפה בנקודה a אז לגרף של f אין אסימפטוטה אנכית באותה נקודה.

$$(\lim_{x \rightarrow a^+} = \lim_{x \rightarrow a^-} = f(a)) \quad \text{כי}$$

מסקנה: כדאי לחפש אסימפטוטות אנכיות רק בנקודות שבהן f לא רציפה.



אסימפטוטות משופעות (Oblique asymptotes)

הגדרה: נאמר שהישר $y = ax + b$ הוא אסימפטוטה משופעת ב- ∞

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax - b) = 0 \quad \text{אם } f(x) \text{ לגרף הפונקציה}$$

באופן דומה מגדירים אסימפטוטה משופעת ב- $-\infty$

(Horizontal asymptotes)

אם $a=0$ אז הישר $y=b$ נקרא **אסימפטוטה אופקית** (ב- ∞ או ב- $-\infty$)

$$\text{הגדרה שקול לכך ש- } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \quad \text{או} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b.$$

משפט:

נניח ש- f מוגדרת ב- $(1, \infty)$

אז הישר $y = ax + b$ אסימפטוטה משופעת לגרף של f ב- ∞ אם ורק אם:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{ו-} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b$$

(משפט דומה נתון גם ב- $-\infty$)

הסדר:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - ax - b}{x} = 0 \quad \text{אם } \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax - b) = 0 \quad \text{אז גם}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{לכן} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x} - a - \underbrace{\frac{a}{x}}_{\rightarrow 0} \right) = 0 \quad \text{כלומר}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax - b) = 0 \quad \text{ואם מתוך}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b \quad \text{נובע ש-}$$

דוגמה:

$$f(x) = \ln x \quad \text{מוגדרת ב- } (0, \infty)$$

נחפש אסימפטוטה משופעת ב- ∞

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\substack{(\frac{\infty}{\infty}) \\ \text{לופיטל}}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x - 0) = \infty \quad \text{ואז}$$

ולכן אין אסימפטוטה משופעת ב- ∞ .

ושים לב ש- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ לכן יש אסימפטוטה אנכית ב-0.



שיעור 13-ב (14.01.09)

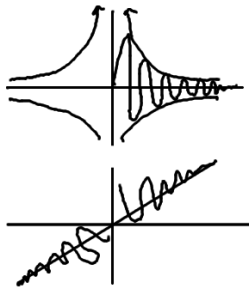
***תרגיל:** למצוא את כל האסימפטוטות לגרף הפונקציה $f(x) = x + \frac{3}{x^2} \sin x$

דוגמה לשאלה למבחן

תשובה: אסימפטוטות אנכיות. f רציפה בכל תחום הגדרה כלומר לכל $x \neq 0$.
לכן אסימפטוטה אנכית יכולה להיות רק ב- $x=0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{3}{x^2} \sin x \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\underbrace{x}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{3}{x^2}}_{\rightarrow \infty} \cdot \underbrace{\sin x}_{\rightarrow 1} \right) = \infty$$

אסימפטוטות משופעות: ב- ∞ :



$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x^3} \sin x \right) = 1$$

$\underbrace{\frac{3}{x^3}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\sin x}_{\text{חסומה}} \rightarrow 0$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{3}{x^2}}_{\text{חסומה}} \sin x = 0$$

$\text{toward } 0$

לכן הישר $y=x$ אסימפטוטה משופעת ב- ∞

וגם ב- $-\infty$ - כי אותם החישובים תקפים גם שם)

מבחן הנגזרת השנייה לקיום נקודות קיצון

משפט: נניח ש- f בעלת נגזרת שנייה רציפה בקטע פתוח המכיל את a .
נניח ש- $f'(a)=0$ אז:

1. אם $f''(a) > 0$ אז a נקודת מינימום מקומי.
2. אם $f''(a) < 0$ אז a נקודת מקסימום מקומי.
3. אם $f''(a) = 0$ המבחן לא עוזר.

אם הוא לא עוזר יש להשתמש בשיטות הרגילות.

הוכחה:

1. אם $f''(a) > 0$ אז מאחר ש- f'' רציפה קיים קטע פתוח I המכיל את a כך ש-
 $\lim_{x \rightarrow a} f''(x) = \underbrace{f''(a)}_{\text{רציפות}} > 0$ כי $f''(x) > 0$ לכל $x \in I$

x	a
f'	- - 0 + +
f''	+ + + + +
f	

f' עולה

לכן קיים קטע מהצורה (c, a) שבו $c < a$ f' שלילית וקיים קטע (a, b) שבו $a < b$ f' חיובי.

2. הוכחה דומה עם חילוף סימנים (חיוביות ושליליות).

3. $f(x)=x^4$ מקיים $f'(0)=0$ ויש ב-0 מינום. $f''(0)=0$

$f(x)=x^3$ מתקיים $f'(0)=0$, $f''(0)=0$ אבל ב-0 יש פיתול.

דוגמאות:

$$f(x) = x^2 - 8x + 6 \ln x \quad (1)$$

f רציפה וגזירה לכל $x > 0$.

$$f(x) = 2x - 8 + \frac{6}{x} = \frac{2x^2 - 8x + 6}{x} = \frac{2(x^2 - 4x + 3)}{x}$$

$f'(x)=0$ כאשר $x=1$ או $x=3$.

אין נקודות בתחום $x>0$ הנגזרת לא קיימת, לכן אלה הן הנקודות הקריטיות היחידות של f .

$$f''(1)=2-6<0 \quad \text{לכן} \quad f''(x)=2-\frac{6}{x^2}$$

לכן לפי מבחן הנגזרת השנייה $x=1$ נקודת מקסימום מקומי.

$f''(3) = 2 - \frac{6}{5} > 0$ לכן $x=3$ נקודת מינימום מקומי.

$$\begin{array}{c|c} x & 3 \\ \hline f' & - \quad 0 \quad + \\ & \swarrow \quad \searrow \end{array}$$

2. נניח ש- $f'(x) = \frac{e^{x^2-2x+2}(x-3)(x^2+3)}{\sqrt{x^2+x+1}}$ וזו נקודה קריטית יחידה. $f'(3)=0$

אבל לא כדאי לחשב את f'' .
לכן $x=3$ נקודת מינימום מקומי.

שאלה: לחקור את $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$

תשובה:

1. תחום הגדרה ונקודות חיתוך עם הצירים:

תחום הגדרה $x \neq 0$ נק' חיתוך $(-2, 0)$

2. אסימפטוטות

תזכורת: אפילו אם הפונק' תמיד מוגדרת, עדיין יש לה אולי אסימפטוטות.

אנכיות: f רציפה לכל $x \neq 0$ לכן תיתכן אסימפטוטה אנכית רק ב- $x=0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x+2) e^{\frac{1}{x}} = \underbrace{2}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\infty}_{e^{\infty} = \infty} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+2) e^{\frac{1}{x}} = \underbrace{2}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{0}_{e^{-\infty} = 0} = 0$$

לכן הישר $x=0$ אסימפטוטה.

(טבלט סימנים :: ראו בדף הבא)

משופעות: ב- ∞

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2)e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) \underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{\substack{\rightarrow 0 \\ e^0 = 1}} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[(x+2)e^{\frac{1}{x}} - x \right] = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t = \frac{1}{x}}} \frac{e^t - 1}{t} = 1 \quad \text{כי}$$

לכן הישר $y=x+3$ אסימפטוטה משופעת ב- ∞

ב- $-\infty$

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right) e^{\frac{1}{x}} = 1$$

$\underbrace{\frac{2}{x}}_{\rightarrow 0} \underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{e^0=1}$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[(x+2)e^{\frac{1}{x}} - x\right] = ' \infty - \infty '$$

$$= \lim_{x=-t, t \rightarrow \infty} \left[(-t+2)e^{-\frac{1}{t}} + t\right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[t(1 - e^{-\frac{1}{t}}) + 2e^{-\frac{1}{t}}\right]$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t(1 - e^{-\frac{1}{t}}) \stackrel{0 \cdot \infty}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} -\frac{1}{y}(1 - e^y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

נחשב בנפרד את

לכן הישר $y=x+3$ אסימפטוטה משופעת גם ב- $-\infty$

3. גזרת ראשונה (עליה, ירידה וקיצון)

$$f'(x) = \left[(x+2)e^{\frac{1}{x}}\right]' = e^{\frac{1}{x}} + (x+2)e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}}\left[1 - \frac{x+2}{x^2}\right] = e^{\frac{1}{x}} \frac{x^2 - x - 2}{x^2}$$

לכן f גזירה לכל x בתחום: $f'(x)=0$ ב- $x=2$ ו- $x=-1$.

$$f(2) = 4e^{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{e} \quad f(-1) = (-1+2)e^{-1} = \frac{1}{e}$$

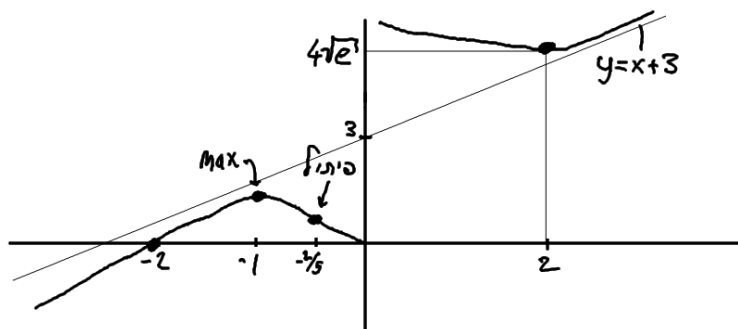
4. קמירות, קעירות ופיתול

$$f''(x) = \left[e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)\right]' = e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) + e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3}\right)$$

$$= e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3}\right) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^4} (5x+2)$$

x	-2	-1	$-\frac{2}{5}$	2	
f'	+	+	0	-	0
f''	-	-	0	+	+
f	↗	0	↗ $\frac{1}{e}$	↘ $4\sqrt{e}$	↗

5. שרטוט:



תרגיל: לחקור את $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

1. תחום הגדרה ונקודות חיתוך עם הצירים
תחום הגדרה: $x > 0$. נקודות חיתוך עם הצירים $(1, 0)$

2. אסימפטוטות
 f רציפה לכל $x > 0$ ולכן תיתכן אסימפטוטה אנכית רק ב- $x=0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$$

נחשב: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \rightarrow -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$

לכן הישר $x=0$ אסימפטוטה אנכית.

אסימפטוטות משופעות: (רק ב- ∞)

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - a) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln x}{x} - 0 \right) = 0$$

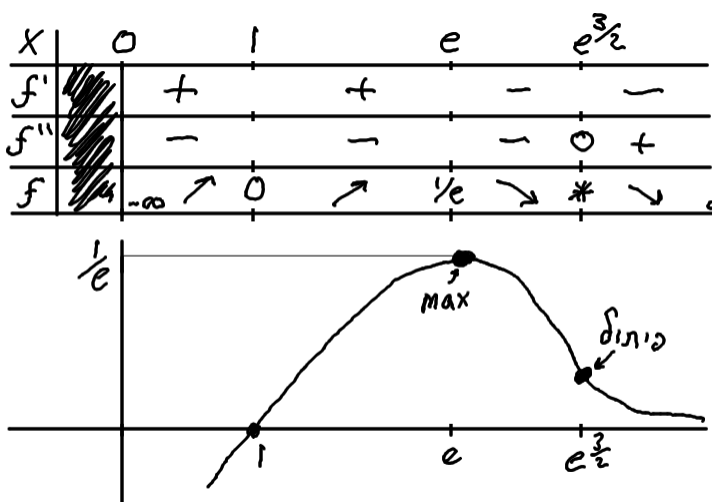
לופיטל

לכן הישר $y=0$ אסימפטוטה אופקית לגרף.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{\left(-\frac{1}{x}\right) \cdot x^2 - 2x \cdot (1 - \ln x)}{x^4} = \frac{-x - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$$

$$x = e^{\frac{3}{2}} \leq \ln x = \frac{3}{2}$$



5. שרטט:

$$x > 0 \quad \frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

אינדקס

23.....סימטרי	א
ע	18.....אי זוגית
119.....עולה	אסימפטוטה
פ	125.....אסימפטוטה אופקית
24.....פרבולה	124.....אסימפטוטה אנכית
ר	125.....אסימפטוטות משופעות
26.....רדיאנים	ג
a	35.....גבול
105.....arccos	48.....גבולות חד צדדים
104.....arcsin	85.....גזירה
105.....arctan	ה
.....asymptotes	59.....הרכבות פונקציות רציפות
125.....Horizontal asymptotes	ז
125.....Oblique asymptotes	18.....זוגית
124.....Vertical asymptotes	ח
c	38.....חסומה
28.....cos	38.....לא חסומה
30.....cot	י
e	119.....יורדת
75.....e	כ
l	כללים
79.....ln	97.....כלל השרשרת
78.....log	ל
R	79.....לוגריתם הטבעי
.....Rules	מ
97.....Chain Rule	108.....מינימום מוחלט
s	106.....מינימום מקומי
27.....sin	106.....מקסימום מקומי
t	משפט
29.....tan	50.....משפט הסנדוויץ'
T	107.....משפט פרמה
.....Theorem	111.....משפט רול
115.....Cauchy's Mean Value Theorem	109.....משפטי ויירשטראס
109.....Extreme Value Theorem	נ
107.....Fermat's Theorem	107.....נקודה קריטית
111.....Rolle's Theorem	121.....נקודת קיצון
50.....Squeeze Theorem	ס