

מבוא להסתברות - תרגול

מהתרגולים של אורי להב
מרכז הבינתחומי הרצליה
סמסטר ב', שנה א', 2009

תאריך עדכון אחרון של קובץ זה הוא

שישי, 26 פברואר, 2010

עדכונים וכתב הויתור (שווה לקרוא) נמצאים באתר

<http://idc.gadi.cc/compsci/>

הסיכומים הוכנו ע"י גדי כהן
סטודנט לתואר מדעי המחשב

תוכן העניינים

7.....	Quick Reference
8.....	אינדקס

1.....	שיעור 1 - 26.02.10
1.....	קומבינטוריקה
3.....	קבוצות

שיעור 1 - 26.02.10

אורי - olahev@idc.ac.il

חוברת תרגילים באתר... 30 דפים, להדפיס ולהביא לשיעורים הבאים.
בודק תרגילים - שאלות אליו. שעות קבלה, לקבוע מראש בימי רביעי, חמישי.

קומבינטוריקה

1. כמה אפשרויות יש לסדר 10 אנשים בשורה:

- א. כאשר אלי ובתיה צמודים?
- ב. כאשר אלי ובתיה וגדי צמודים וגם אלי ובתיה צמודים?
- ג. כאשר אלי ובתיה צמודים וגדי לא צמוד אליהם?

עקרון הכפל: נערך ניסוי שבו k שלבים. לכל שלב, מספר תוצאות אפשריות.

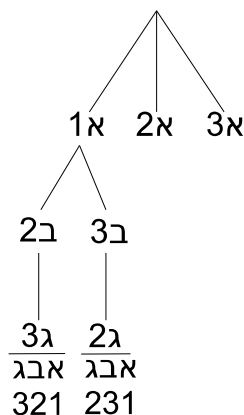
• בשלב 1, n_1 תוצאות אפשריות.

⋮

• בשלב k , n_k תוצאות אפשריות.

מספר התוצאות האפשריות a בניסוי כולל הוא: $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$

סידור n אנשים בשורה כניסוי רב שלבי



2 אנשים: א' ו-ב'. מקומות: 1 ו-2.

אפשרויות: א-1 (ו-ב-2) או א-2 (ו-ב-1). אז $2!$ אפשרויות.

3 אנשים: א, ב, ג. 3 מקומות: 1, 2, 3.

$$n_1=3 \quad n_2=2 \quad n-3=3 \quad 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$$

נחזור לשאלה...

א. נתאר ניסוי מבאים יש שני שלבים:

שלב 1: סידור אנשים כשאר אלי ובתיה מהווים יחידה אחת: $n_1=9!$

שלב 2: סידור פנימית של אלי ובתיה. $n_2=2$

לכן $2 \cdot 9!$

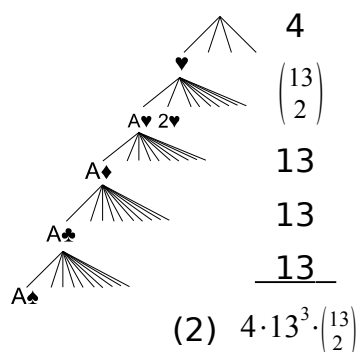
- ב. 4 אפשרויות: אבג, גאב, באג, גבא. נתאר כניסוי דו שלבי.
 שלב 1: סידור האנשים כאשר אלי בתיה וגדי יחידה אחת. 8!
 שלב 2: סידור פנימי של היחידה אלי בתיה וגדי. 4
 אז לפי עקרון הכפל $8! \cdot 4$

- ג. העץ לא יהיה סימטרי - אי אפשר ישירות דרך עקרון הכפל.
 A - סידורים של סעיף א'.
 B - סידורים של סעיף ב'.
 C - סידורים של סעיף ג'. $C = A \setminus B$ $|C| = |A| - |B|$ (מותר כי $B \subseteq A$)
 $|C| = 9! \cdot (2 - 8) \cdot 4$

2. בוחרים 5 קלפים מתוך חפיסה של 52 קלפים.
 א. כמה אפשרויות יש?
 ב. בכמה אפשרויות יש לפחות קלף 1 מכל סוג? (לב, יהלום, תלחן, עלה)
 ג. אותו דבר עם 6 קלפים?

א. $\binom{52}{5} = \frac{52!}{(52-5)! \cdot 5!}$ (52 בחר 5). אבל אין צורך לפתוח את זה.

- ב. חמישיות בהם יש קלף אחד מכול סוג מכילה זוג קלפים מאותו סוג ושלושה קלפים אחרים כל אחד מסוג אחר. נתאר כניסוי רב שלבי:



- שלב 1: נבחר סוג ממנו יופיעו שני קלפים.
 שלב 2: נבחר שני קלפים מהסוג שנבחר בשלב 1:
 שלב 3: נבחר קפל נוסף מסוג אחר:
 שלב 4: "
 שלב 5: "

ג. א - $\binom{52}{6}$

- ב - ששייה כזו היא מאחת מהצורות הבאות:
 אפשרות א': שלישיה מאותו סוג 1-3 נוספים כל אחד מסוג אחר.
 אפשרות ב': זוג מאותו סוג. זוג נוסף מסוג אחר.
 ושני קלפים נוספים כל אחד מסוג אחר.

אפשרות א: נתאר כניסוי:

- שלב 1: נבחר סוג ממנו תופיע שלישייה. 4
 שלה 2: נבחר שלישייה מסוג זה. $\binom{13}{3}$
 שלב 3: נבחר קלף מסוג אחר. 13
 שלב 4: " 13
 שלב 5: " 13

ד. אפשרות ב: נתאר כניסוי.

- שלב 1: נבחר 2 סוגים שיהיה מהם זוג. $\binom{4}{2}$
 שלב 2: נבחר זוג מסוג ראשון שנבחר $\binom{13}{2}$
 שלב 3: נבחר זוג מסוג שני שנבחר. $\binom{13}{2}$
 שלב 4: נבחר קלף מסוג אחר. 13
 שלב 5: " 13

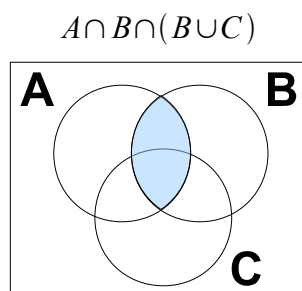
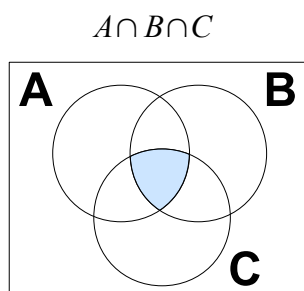
1. לא נכון יש פה טעות:

- שלב 1: נבחר סוג ממנו יופיע זוג. 4
 שלב 2: נבחר זוג מסוג זה. $\binom{13}{2}$
 שלב 3: נבחר סוג נוסף. 3
 שלב 4: נבחר זוג מסוג זה. $\binom{13}{2}$
 שלב 5: נבחר קלף מסוג אחר. 13
 שלב 6: נבחר קלף מסוג אחר. 13
 ספרנו כמה קלפים פעמים.

קבוצות

1. הוכח/הפוך:

$$A \cap B \cap C = A \cap B \cap (B \cup C)$$



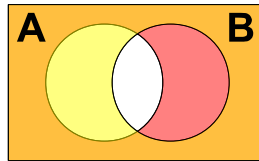
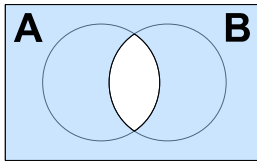
הערות לדיאגרמות ון:

1. תמיד מצב כללי.
2. לצייר מסגרת.

הפרכה בעצמאות דוגמה נגיד:

$$C = \emptyset \quad B = \{\square\} \quad A = \{\square\}$$

קיבלנו ש- $A \cap B \cap C = \emptyset$ ו- $A \cap B \cap (B \cup C) = \{\square\}$.



$$2. \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad (\text{דה מורגן})$$

בקורס הזה מספיק רק דיאגרמות ון.

3. Ω - קבוצת המרצים בטכניון.

A - קבוצת המרצים באיבחניים בטכניון.

B - קבוצת המרצים הביקורתיים באכניון.

C - קבוצת המרצים שמחלקים סילבוס בטכניון.

בטא ע"י איחוד/איחוד / משלים: (נעזר ע"י דיאגרמות ון)

- | | |
|--|---|
| $A \cap B \cap C$ | א. קבוצת המרצים בעלי 3 תכונות. |
| $\overline{A \cap B \cap C}$ או $\overline{A \cup B \cup C}$ | ב. קבוצת המרצים בעלי אף תכונה. |
| $A \cup B \cup C$ | ג. קבוצת המרצים בעלי תכונה 1 לפחות. |
| $\overline{C}$ | ד. קבוצת המרצים בעלי שאינם מחלקים סילבוס. |
| $(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$ | ה. קבוצת המרצים בעלי תכונה 1 בדיוק. |
| $(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)$ | ו. קבוצת המרצים בעלי 2 תכונות בדיוק. |
| $1 \cup \overline{A}$ | ז. קבוצת המרצים בעלי 2 תכונות לפחות. |

4. נתונות קבוצות:

Ω קבוצת הקלפים בחפיסה.

E - קבוצת האסים בחפיסה.

F - קבוצת הלבבות בחפיסה.

G - קבוצת האדומים בחפיסה.

מצא את מספר הקלפים ב:

- | | |
|--------------------------|---|
| א. $E \cap \overline{G}$ | מדובר בקבוצת האסים שהחורים: 2 |
| ב. $\overline{G} \cup F$ | $ E \cap \overline{G} = 2$ שחורות, $\overline{G} = F$ לא לבבות. |
| ג. $\overline{F \cap G}$ | $\overline{G} \subseteq F$ $\overline{G} \cup F = F$ $ \overline{F} = 39$ |
| ד. $F \cup G$ | לפי דה מורגן: $\overline{F \cap G} = F \cup G = \overline{G} \cup F$: $ \overline{F \cap G} = 39$ |
| ה. $E \cap F \cap G$ | או בלי ד' מ': $F = F \cap G$ כי $F \subseteq G$. $ \overline{F \cap G} = \overline{F} = 39$ |

5. בסקר שנערך ברב 100 אנשים נשאלו 3 שאלות:

1. האם אתה צופה בערוץ 1?

2. האם אתה צופה בערוץ 2?

3. האם אתה צופה בערוץ 3?

4 אנשים ענו כן על שאלה 1.

3 אנשים ענו כן על שאלה 1 ו-2.

70 אנשים ענו כן על שאלה 2 או 3.

אדם אחד ענה "כן, לא, כן"

אף אחד לא ענה "כן, כן, כן"

כמה אנשים השיבו לא לשלוש השאלות?

A - ענו כן ל-1.

B - ענו כן ל-2.

C - ענו כל ל-3.

$$x_1 = ?$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_8 = 100$$

$$x_2 + x_5 + x_7 + x_8 = 4$$

$$x_7 + x_8 = 3$$

$$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 70$$

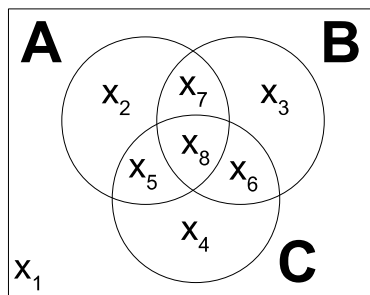
$$x_5 = 1$$

$$x_8 = 0$$

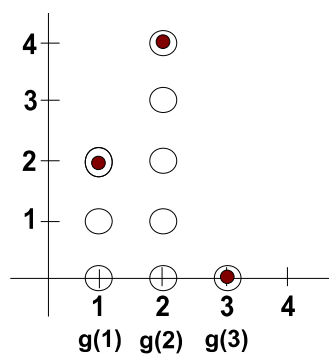
$$x_7 = 3$$

$$x_2 = 0$$

$$x_1 = 30 \quad x_2 = 0 \quad x_1 + x_2 = 30$$



בחזרה לקומבינטוריקה



שאלה: נתונה פונקציה $f: \{1, 2, \dots, N\} \rightarrow \mathbb{N}(\{0, 1, 2, \dots\})$
 כמה פונקציות $g: \{1, 2, \dots, N\} \rightarrow \mathbb{Z}(\{\dots, -1, 0, 1, \dots\})$

כאשר:

1. $0 \leq g(n) \leq f(n)$ לכל n

2. $|g(n)| \leq f(n)$ לכל n

נתאר כניסוי רב שלבי:

$f(1)+1$	שלב 1: נבחר את $g(1)$
$f(2)+1$	שלב 2: נבחר את $g(2)$
$\vdots$	$ $
$f(N)+1$	שלב N: נבחר את $g(N)$

$$(f(1)+1) \cdots (f(N)+1) = \prod_{i=1}^N (f(i)+1)$$

(ב) באותה צורה נקבל: $\prod_{i=1}^N (2f(i)+1)$

אפשר לפתור את שיעורי הבית, אין צורך לחכות ליום שני - לא יעזור.

Quick Reference

