

מבוא להסתברות

מההרצאות של פרופ' אורי ליברמן
מרכז הבינתחומי הרצליה
סמסטר ב', שנה א', 2009

תאריך עדכון אחרון של קובץ זה הוא

שישי, 26 פברואר, 2010

עדכונים וכתב הויתור (שווה לקרוא) נמצאים באתר

<http://idc.gadi.cc/compsci/>

הסיכומים הוכנו ע"י גדי כהן
סטודנט לתואר מדעי המחשב

תוכן העניינים

5.....	מקדם מולטינום	1.....	שיעור 1 - 22.02.10
6.....	הבינום של ניוטון	1.....	קומבינטוריקה
9.....	Quick Reference	2.....	מגדמים סדורים / Ordered Samples
10.....	אינדקס	3.....	מגדמים לא סדורים

שיעור 1 - 22.02.10

ציונים, שיעורי בית וכו' בסילבוס. קיצור, מבחן סופי 90%, שיעורי בית 10%. צריכים להגיש 80% משיעורי הבית - יותר, לוקחים הציונים הכי גבוהים, פחות - מקבלים 0. צריכים להגיש ביום שישי עד 8:30 (לפני התרגול) בחדר עבודות.

"על תהססו": 054-431-4624, liberman@post.tau.ac.il.

קומבינטוריקה

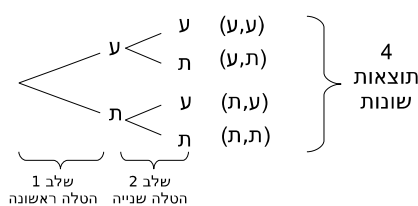
אוסף של שיטות למצוא את מספר האיברים של קבוצה סופית.

שני עיקרונות יסוד

• עקרון החיבור

סכום מספרי האיברים באיחוד של שתי קבוצות (זרות) הוא מספר האיברים בקבוצת האיחוד. בגלל שהקבוצות זרות ($A \cup B = \emptyset$) אז הסכום הוא: $N(A) + N(B)$

• עקרון הכפל

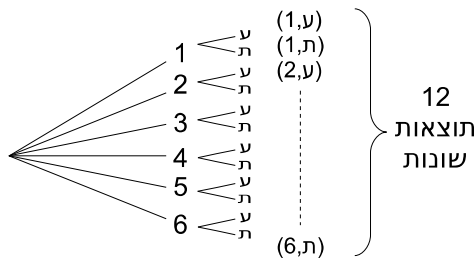


דוגמה 1: מטיילים מטבע פעמיים. "ת", "ע".

כמה תוצאות שונות ישנן?

מספר התוצאות הניסוי הוא 4

כי $4 = 2 \times 2$



דוגמה 2:

נערך ניסוי דו-שלבי.

בשלב הראשון מטיילים רוביה

ובשלב השני מטבע.

כמה תוצאות שונות יש לניסוי?

מספר התוצאות השונות הוא 12

כי $12 = 6 \times 2$

באופן כללי: מספר התוצאות השונות בניסוי רק שלבי הוא מכפלת מספר התוצאות

בשלבים השונים.

פורמלית: אם לניסוי יש k שלבים ונניח:

• n_1 תוצאות בשלב 1

⋮

• n_k תוצאות בשלב k

מספר התוצאות השונות בניסוי ה- k שלבי הוא $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$

הערה: תוצאות של הניסוי ה-k שלבי.

נמצא וקטור k ממדי $(x_1, x_2, \dots, x_k)$

כאשר $x_i =$ מספר התוצאות בשלב מס i.

דוגמה 1:

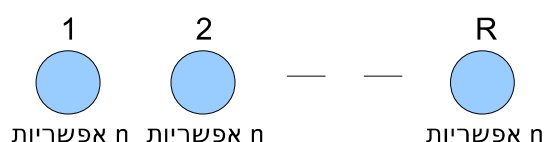
במשרד שידוכים רשומים 20 בנות ו-18 בנים. שידוך הוא זוג (בת , בן)
מספר השידוכים השונים הוא, לפי עקרון הכפל, $18 \times 20 = 360$ 20 אפשריות 18 אפשריות

דוגמה 2:

מטילים n קוביות שונות. כמה תוצאות שונות ישנן? $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

מספר התוצאות השונות $\underbrace{6 \times 6 \times \dots \times 6}_{6 \text{ פעמים}} = 6^n$

דוגמה 3:



מפזרים R כדורים שונים ב- n תאים שונים כאשר כל כדור יכול להיכנס לכל תא ואין מגבלה לתכולת התאים. כמה פיזורים שונים ישנן?

$(y_1, y_2, \dots, y_r)$ כש $y_1 =$ מספר התא שאליו הוכנס כדור מספר i.

מספר הפיזורים השונים, לפי עקרון הכפל, הוא: $\underbrace{n \times n \times \dots \times n}_{r \text{ פעמים}} = n^R$

מגדמים סדורים / Ordered Samples

נתונה קבוצה A שיש בה n עצמים.

מדגם סדור בגודל R

רשימה מסודרת של R איברים מהקבוצה A .

(1) מדגם עם החזרה

(2) מדגם בלי החזרה

למשל, נתבונן בקבוצת הספרות $0, 1, \dots, 9$.

מדגם סדור בגודל 3. מספר תלת ספרתי.

(1) הספרות שונות (דגימה ללא חזרה)

יש רק 720 מספרים תלת ספרתיים שספרותיהם שונות $10 \times 9 \times 8 = 720$

(2) הפרות יכולות להיות שוות (דגימה עם חזרה) $10 \times 10 \times 10 = 1000$

יש 1000 מספרים לתלת ספרתיים שהספרות שלהם יכולות להיות שוות.

מספר הצדגמים הסדורים בגודל R מקבוצה בת n עצמים הוא:

(1) בדגימה עם החזרות: $(x_1, x_2, \dots, x_R)$ כאשר x_i = מספר העצם ה-i שנבחר.

$$\underbrace{n \times n \times \dots \times n}_{R \text{ פעמים}} = n^R \quad \text{לכן}$$

(2) בדגימה בלי חזרה: $(x_1, x_2, \dots, x_R)$ כאשר ל- x_1 יש n אפשרויות

x_2 יש (n-1) אפשרויות

x_R יש (n-r+1) אפשרויות

$$\text{סימון: } n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-R+1) = (n)_R$$

אם $R=n$ אזי $(n)_n = n(n-1) \cdots 1 = n!$ - מספר הסידורים בבחירה של n עצמים.

$$1! = 1 \quad 2! = 1 \cdot 2 = 2 \quad 3! = 2! \cdot 3 = 6 \quad n! = (n-1)! \cdot n \quad 0! = 1$$

מגדמים לא סדורים

נתונה קבוצה A שיש בה n עצמים.

מדגם לא סדור בגודל R מהקבוצה A הוא בעצם קבוצה חלקית של A שיש בה R עצמים.

$$\text{דוגמה: } A = \{a, b, c\} \quad R=2 \quad n=3$$

מדגמים הסדורים (ללא חזרה): $\{a, b\}, \{b, a\} \quad \{a, c\} \quad \{c, a\} \quad \{b, c\}, \{c, b\}$

מגדמים לא סדורים: $\{a, b\} \quad \{a, c\} \quad \{b, c\}$

$$\underbrace{[\text{במצגים השורה הסידורים מספר}]}_{R!} \times \underbrace{[\text{סדורים הלא המדגמים מספרים}]}_2 = \underbrace{[\text{הסדורים המדגמים מספר}]}_{(n)_R}$$

$$\text{לכן } [\text{סדורים הלא המדגמים מספר}] = \frac{(n)_R}{R!}$$

$$\frac{(n)_R}{n!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-r+1)}{R!} = \frac{n!}{R!(n-R)!}$$

$$\text{סימון: } \text{מספר הקבוצות החלקיות בנות R איברים של קבוצה בת n איברים} = \binom{n}{r} = \frac{(n)_R}{r!} = \frac{n!}{r!(n-R)!}$$

$$= \binom{n}{R} \quad \text{מקדם בינומי.}$$

תכונות:

$$\binom{n}{0} = 1 \quad 1.$$

$$\binom{n}{n} = 1 \quad 2.$$

$$\binom{n}{1} = n \quad 3.$$

$$\binom{n}{R} = \binom{n}{n-R} \quad 4.$$

שימושים:

1. בכד $(R+W)$ כדורים מהם R כדורים אדומים, ו- W כדורים ללבנים. מסדרים את הכדורים בשורה. כדורים מאותו צבע נראים אותו דבר. כמה סידורים שונים ניתן להבחין בעין? סידור שניתן להבחין בו בעין.

סידור פרושו בחירת R מקומות בשורה בתוך $(R+W)$ מקומות שיופיעו בהם כדורים אדומים (ביתר לבנים). מספר הסידורים הוא $\binom{R+W}{R} = \binom{R+W}{W} = \frac{(R+W)!}{R!W!}$ בינומי - 2 צבעים, 2 סוגים.

הכללה: נתונים n עצמים מ- k סוגים שונים.

R_1 עצמים מסוג 1

$\vdots$

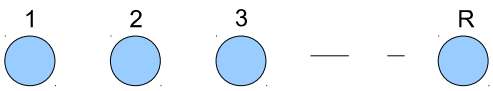
R_k עצמים מסוג k

$$R_1 + R_2 + \dots + R_k = n$$

אין אפשרות להבחין בעין בין עצמים מאותו סוג.

כמה סידורים שונים של n עצמים בשורה ניתן להבחין בהם בעין?

$$\binom{n}{R_1} \times \binom{n-R_1}{R_2} \times \binom{n-R_1-R_2}{R_3} \times \dots \times \binom{n-R_1-R_2-\dots-R_{k-1}}{R_k}$$



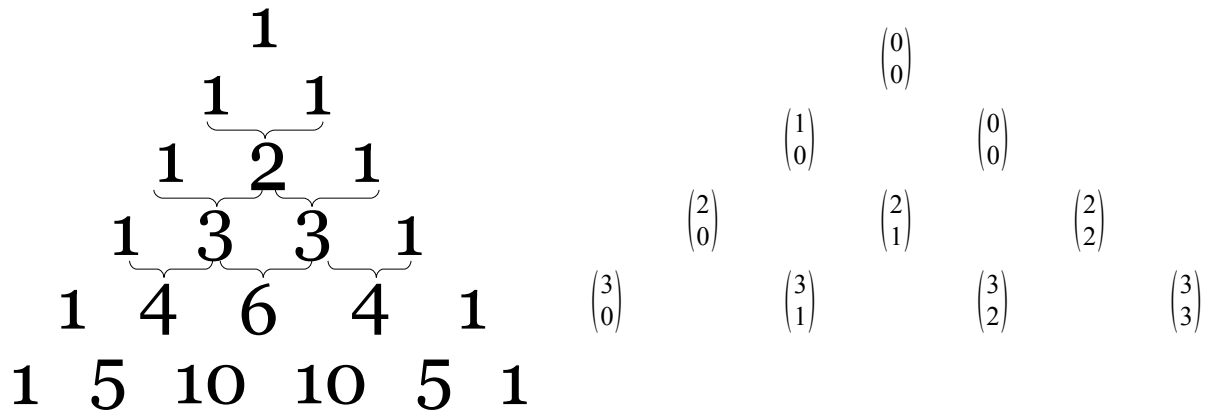
המקומות לעצמים מסוג 1 המקומות לעצמים מסוג 2

$$\frac{n!}{R_1!(n-R_1)!} \times \frac{(n-R_1)!}{R_2!(n-R_1-R_2)!} \times \frac{(n-R_1-R_2)!}{R_3!(n-R_1-R_2-R_3)!} \times \dots \times \frac{R_k!}{R_k!0!} = \frac{n!}{R_1!R_2!\dots R_k!}$$

$\binom{n}{R_1}$ $\binom{n-R_1}{R_2}$ $\binom{n-R_1-R_2}{R_3}$

מקדם מולטינום

תכונות המקדמים הבינומיים: משולש פסקל



תכונות המשולש:

1. בקצה כל שורה מופיע 1. $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$

2. כל שורה נקראת מימין ומשמאל אותו הדבר. $\binom{n}{R} = \binom{n}{n-R}$

3. כל שורה נקבעת ע"י השורה הקודמת ע"י הזות של משולש פסקל. $6 = 3 + 3$
 $\binom{4}{2} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2}$

זהות פסקל: $\boxed{\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}}$

$$\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{k-1!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = n! \left[\frac{k}{k!(n-k+1)!} + \frac{n-k+1}{k!(n-k+1)!} \right]$$

$$(n-k+1) + \binom{n}{k} = n! \frac{(n+1)}{k!n-k+1!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k} \quad \text{קיצור:}$$

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\}$$

$$= \binom{n+1}{k} \quad \text{מספר הקבוצות החלקיות של A שיש בהם k איברים.}$$

במילים אחרות, נמין כל קבוצה חלקית כזו לאחד משתי סוגות.

סוג 1: קבוצות חלקיות בנות k איברים ש- a_{n+1} הוא אחד מהן: יש $\binom{k}{k-1}$ קבוצות.

סוג 2: קבוצות חלקיות בנות k איברים ש- a_{n+1} לא מופיע בהן: יש $\binom{n}{k}$ קבוצות כאלה.

ולפי העיקרון החיבור: $\boxed{\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}}$

0)	1	$1=2^0$
1)	1 1	$2=2^1$
2)	1 2 1	$4=2^2$
3)	1 3 3 1	$8=2^3$
4)	1 4 6 4 1	$16=2^4$
5)	1 5 10 10 5 1	$32=2^5$

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} = 2^n \quad \text{תכונה 4:}$$

מספר כל קבוצות החלקיות שיש לשקבוצה בת n איברים

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \quad \text{בניח ש-}$$

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{נמצא בקבוצה החלקית} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \leq$$

$$2^n = \text{מספר הקבוצות החלקיות} = \text{מס' הוקטורים}$$

הבינום של ניוטון

$$(a+b)^n = \square$$

$$\begin{aligned} (a+b)^1 &= a+b \\ (a+b)^2 &= (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{aligned}$$

$$(a+b)^n = \sum \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\dots(a+b)}_{n \text{ פעמים}} = \sum \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$a=b=1, \underbrace{(1+1)^n}_{2^n} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

טרינום:

$$(a+b+c)^n = \sum \square a^x b^y c^z$$

$$x+y+z=n \quad \text{כאשר}$$

$$(a+b+c)^n = \sum \frac{n!}{x!y!z!} a^x b^y c^z$$

תרגילים סיכום:

1. על קוביית דומינו רשומים שני מספרים ואין אבחנה בין שני צידי הקבוביה. שאלה: כמה קוביות דומינו ניתן ליצור מהמספרים $1, 2, \dots, n$? $\boxed{1\ 2} = \boxed{2\ 1}$

הקוביות הן משני סוגים:

1. קוביות שבהן שני מספרים שווים: $\boxed{n\ n}$ $\boxed{2\ 2}$ $\boxed{1\ 1}$ n קוביות
2. קוביות ששתי המספרים עליהם שונים $\boxed{x\ y}$ $x \neq y$ $\binom{n}{2}$ קוביות

לפי עקרון החיבור, מספר הקוביות הדומינו הוא:

$$\binom{n}{2} + n = \left[\frac{n!}{2!(n-2)!} \right] + n = \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n-1+2)}{2}$$

כלומר מספר קוביות הדומינו הוא $\binom{n}{2} + n = n \frac{(n+1)}{2}$

הערה: מספר קוביות הדומינו (השלימו....) $n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = n \frac{(n+1)}{2}$

דוגמה 2:

מסדרים על מדף 12 ספרים מהשם
5 ספרי מתמטיקה, 4 ספרי פיזיקה ו-3 ספרי כימיה.
(א) כמה סידורים שונים ישנם? $12!$ סידורים.
(ב) כמה סידורים מופיעים ספרים מאותו תחום זה ליד זה?
"סידור" - פעולה רב-שלבי:

- (1) I - סידור "התחומים" - $3!$ אפשרויות.
- (2) II - סידור של ספרי המתמטיקה - $5!$ אפשרויות
- (3) III - סידור ספרי הפסיקה - $4!$ אפשרויות
- (4) IV - סידור ספרי הכימיה - $3!$ אפשרויות.

לפי עקרון הכפל, מספר הסידורים $3! \times 5! \times 4! \times 3!$

דוגמה 3:

כמה מחלקים שונים יש למספר 9000?
מפרקים את 9000 לגורמים ראשוניים: $9000 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3$
מחלק של $2^x 3^y 5^z = 9000$ $x=0,1,2,3$ $y=0,1,2$ $z=0,1,2,3$ (x, y, z)
מס' הוקטורים = מס' המחלקים = $4 \times 3 \times 4 = 48$, שזה כולל את 1 ו-9000.

דוגמה 4:

כמה סימנים מוסכמים של 8 דגלים ניתן ליצור מ-4 דגלים צהובים, 3 כחולים ו-2 אדומים.

$$\frac{8!}{4!2!2!}$$

המקדם המולטינומי

דוגמה 5:

הראו כי

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \dots + \binom{k-1}{k-1} \quad (\alpha)$$

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1} \quad (\beta)$$

$$k \binom{n}{k} = k \frac{n!}{k!(n-k)!} \stackrel{k \neq 0}{=} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} = n \left[\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \right] = n \cdot 2^{n-1}$$

Quick Reference

אינדקס

1.....	מ	מגדמים לא סדורים.....
1.....	3.....	מגדמים סדורים.....
ק	2.....	משולש פסקל.....
1.....	5.....	ע
קומבינטוריקה.....		