

# לוגיקה ותורת הקבוצות - תרגול

מהתרגולים של עדו סמט  
מרכז הבינתחומי הרצליה  
סמסטר ב', שנה א', 2009

תאריך עדכון אחרון של קובץ זה הוא

שישי, 26 פברואר, 2010

עדכונים וכתב הויתור (שווה לקרוא) נמצאים באתר

<http://idc.gadi.cc/compsci/>

הסיכומים הוכנו ע"י גדי כהן  
סטודנט לתואר מדעי המחשב

# תוכן העניינים

|        |                                 |
|--------|---------------------------------|
| 5..... | <a href="#">Quick Reference</a> |
| 6..... | <a href="#">אינדקס</a>          |

|        |                                    |
|--------|------------------------------------|
| 1..... | <a href="#">שיעור 1 - 26.02.10</a> |
| 1..... | אינדוקציה                          |

## שיעור 1 - 26.02.10

תרגיל 1: <http://tinyurl.com/iddo-ex1>

יפרסם תמיד לפני סופ"ש (ואחרי רביעי), להגיש עד יום חמישי חדר עבודות ב-7.

שלושה נושאים שאין קשר ביניהם:

1. תורת הקבוצות set
2. לוגיקה פורמלית
3. אלגברה - חבורות group

מוסכמים לקורס:

1. הטבעיים לא כולל 0.  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$   $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$
2. כל הפונקציות מלאות.

### אינדוקציה

משפט האינדוקציה:

תהי A קבוצה, כך ש-  $A \subseteq \mathbb{N}$  ונניח שמתקיימות תכונות הבאות:

1.  $1 \in A$

2. לכל  $n \in \mathbb{N}$ , אם  $n \in A$  אז  $n+1 \in A$

אזי  $A = \mathbb{N}$

משפט האינדוקציה נותן לנו כלי חדש להוכיח טענות מהצורה "לכל  $n \in \mathbb{N}$  מתקיים..."

תרגיל: הוכיחו שלכל n טבעי,  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

פתרון: נוכיח זאת באינדוקציה.

נגדיר  $A = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid 1^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\}$

אנחנו רוצים להוכיח ש-  $A = \mathbb{N}$

נראה שמתקיימים תנאי משפט האינדוקציה.

(א) נבדוק: אכן  $1^2 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6}$  לכן  $1 \in A$

(ב) נראה שלכל  $n \in \mathbb{N}$  אם  $n \in A$  אז  $n+1 \in A$ .  
 יהי  $n$  טבעי כלשהו. נניח ש- $n \in A$  ונראה ש- $n+1 \in A$ .

$$\begin{aligned} 1^2 + \dots + n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{נובע ש-} n \in A \quad \text{מהנחה} \\ 1^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n-1)(2n^2+n)+6(n+1)^2}{6} = \frac{(n-1)(2n^2+n+6n+6)}{6} \\ &= \frac{(n-1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{n(n-1)(n+2)(2n+3)}{6} \quad \text{נחשב:} \\ &= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} \end{aligned}$$

לכן  $n+1 \in A$

לפי משפט האינדוקציה,  $A = \mathbb{N}$  מ.ש.ל.

תרגיל: הוכיחו שלכל  $n$  טבעי,  $4^{4n} - 3n - 1$  מתחלק ב-9.

פתרון: נגדיר  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 4^{4n} - 3n - 1 \text{ מתחלק ב-9}\}$

נבדוק שמתקיימים תנאי משפט האינדוקציה.

(א)  $1 \in A$  לכן ב-9 מתחלק  $4^{4 \cdot 1} - 3 \cdot 1 - 1 = 256 - 4 = 252 = 9 \cdot 28$

(ב) יהי  $n \in \mathbb{N}$ . נניח  $n \in A$ , כלומר  $9 \mid 4^{4n} - 3n - 1$  (סימון).

נבדוק מה קורה עם  $n+1$ :

$$\begin{aligned} 4^{4(n+1)} - 3(n+1) - 1 &= 4^4 \cdot 4^{4n} - 3n - 3 - 1 \\ &= 4^4(4^{4n} - 3n - 1) + \underbrace{4^4 \cdot 3n + 4^4 - 3n - 4}_{= 4^4(4^{4n} - 3n - 1) + (4^4 - 1) \cdot 3n + (4^4 - 4)} \\ &= 4^4(4^{4n} - 3n - 1) + (4^4 - 1) \cdot 3n + (4^4 - 4) \end{aligned}$$

נראה שכל אחת משלושת המחוברים מתחלק ב-9,

ולכן גם הסכום מתחלק ב-9.

–  $4^{4^{n+1}} - 3(n+1) - 1$  מתחלק ב-9 לפי ההנחה.

–  $(4^4 - 1) \cdot 3n = 255 \cdot 3 \cdot n = 3 \cdot 3 \cdot \dots = 9 \cdot \dots$  מתחלק ב-9 (כי  $9 \mid 255$ )

–  $4^4 - 4 = 252$  מתחלק ב-9.

לפיכך,  $n+1 \in A$ .

לפי משפט האינדוקציה,  $A = \mathbb{N}$  מ.ש.ל.

## שתי הערות על המשפט:

1. נתבונן בטענה הבאה: לכל  $n \in \mathbb{N}$ ,  $3n+5$  מתחלק ב-3.

היא שקרית. נסמן  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 3n+5 \text{ מתחלק ב-} 3\}$   
 $A \neq \mathbb{N}$  לכן תנאי משפט האינדוקציה לא מתקיימים.  
 אע"פ כן הטענה הבאה נכונה: לכל  $n \in \mathbb{N}$ , אם  $n \in A$  אז  $n+1 \in A$ .  
 הוכחה: (יש פשוט יותר)  
 יהי  $n$  טבעי. נניח ש-  $n \in A$  אזי  $3n+5$  מתחלק ב-3.  
 מכאן ש-  $(3n+5)+3 = 3(n+1)+5$  מתחלק ב-3 כסכום מספרים המתחלקים ב-3.  
 לכן  $n+1 \in A$  מ.ש.ל.

2. משפט האינדוקציה אינו מאפשר להוכיח טענות מהצורה: "לכל  $x \in \mathbb{R}$  ..."

### ווריאציות של משפט האינדוקציה

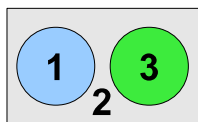
טענה: תהי  $A \subseteq \mathbb{N}$  ונניח שמתקיימים התכונות:

1.  $5 \in A$
  2. לכל  $n \geq 5$  טבעי, אם  $n \in A$  אז  $n+1 \in A$
- אזי  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 5\}$

הוכחה: נגדיר  $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n+4 \in A\}$ . אנו רוצים להוכיח ש-  $B = \mathbb{N}$   
 זאת נעשה ע"י משפט האינדוקציה. נבדוק שמתקיימים תנאיו:

1.  $5 \in A$  ולכן  $1+4 \in A$  ומכאן ש-  $1 \in B$
  2. יהי  $n$  טבעי. נניח  $n \in B$  אזי  $n+4 \in A$ .
- נשים לב ש-  $n+4 \geq 5$  ולכן לפי תכונה ב' של הקבוצה  $A$ ,  
 נסיק ש-  $n+4+1 \in A$  ולכן  $n+1 \in B$ .  
 לפי משפט האינדוקציה,  $B = \mathbb{N}$  ולכן  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 5\}$ .

תרגיל: הוכיחו שלכל  $n$  טבעי מתקיימת הטענה הבאה: בהינתן  $n$  מעגלים שונים במישור,



הם מחלקים אותו לכל היותר ל-  $n^2 - n + 2$  תחומים\*.

הוכחה: נגדיר  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ מתקיים עבורו } n\}$ . נראה ש-  $A = \mathbb{N}$

נבדוק שמתקיימים תנאי משפט האינדוקציה:

1. מעגל אחד מחלק את המישור ל-2 תחומים ו-  $2 = 1^2 - 1 + 2$   
 לכן  $1 \in A$ .
2. יהי  $n$  טבעי. נניח  $n \in A$ . נצייר  $n+1$  מעגלים במישור.  
 $n$  המעגלים הראשונים מחלקים לכל היותר ל-  $n^2 - n + 2$  תחומים,

לפי ההנחה ש-  $n \in A$ .

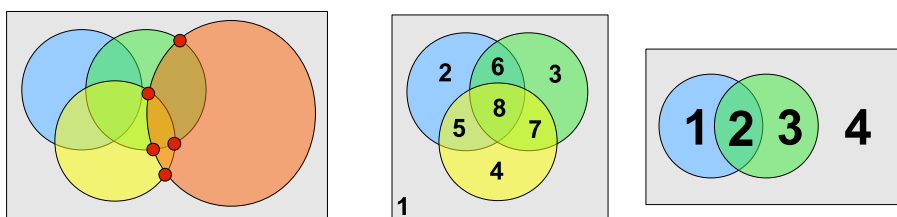
המעגל האחרון (ה-  $n+1$  חותך את כל מעגל קודם לכל היותר ב-2 נקודות. לכן הוא חותך את כל המעגלים הקודמים לכל היותר ב- $2n$  נקודות.

לכן יש לכל היותר  $2n$  קשתות בין נקודות החיתוך. כל קשת כשאת מפצלת תחום קיים לכל היותר לשניים, כלומר, מוסיפה, לכל היותר תחום אחד.

לכן לאחר כך הוספת המעגל האחרון, יש לכל היותר  $(n+1)^2 - (n-1) + 2 = n^2 - n + 2 + 2n$  תחומים.

לכן  $n+1 \in A$

לפי משפט האינדוקציה  $A = \mathbb{N}$ .



## Quick Reference

