

לוגיקה ותורת הקבוצות

מההרצאות של מר' ישראל פרידמן
מרכז הבינתחומי הרצליה
סמסטר ב', שנה א', 2009

תאריך עדכון אחרון של קובץ זה הוא

שלישי, 23 פברואר, 2010

עדכונים וכתב הויתור (שווה לקרוא) נמצאים באתר

<http://idc.gadi.cc/compsci/>

הסיכומים הוכנו ע"י גדי כהן
סטודנט לתואר מדעי המחשב

תוכן העניינים

7.....	Quick Reference
8.....	אינדקס

1.....	שיעור 1 - 23.02.10
1.....	עקרון האינדוקציה
6.....	נושאים בתורת הקבוצות

שיעור 1 - 23.02.10

עקרון האינדוקציה

אקסיומה הסדר הטוב ב- $\mathbb{N}$ $\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$

הגדרה: לכל קבוצה לא ריקה של מספרים טבעיים יש איבר קטן יותר.

דוגמה: לקבוצה של מספרים טבעיים מהצורה $\{2,\dots\}$ יש איבר קטן ביותר, והוא 1 או 2, אבל לא ידוע אם הוא שווה ל-1 או ל-2.

עקרון האינדוקציה

משפט:

נניח ש- A קבוצה של מספרים טבעיים המקיימת את שני התנאים הבאים:

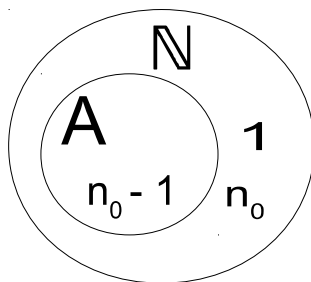
1. $1 \in A$

2. לכל n טבעי, אם $n \in A$ אז גם $n+1 \in A$

אז $A = \mathbb{N}$

הוכחה: צ"ל ש- $A = \mathbb{N}$. נתון ש- $A \subseteq \mathbb{N}$

נניח שקיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $n \notin A$. אז $\mathbb{N} \setminus A \neq \emptyset$ (כי $n \in \mathbb{N} \setminus A$) לפי אקסיומת הסדר הטוב קיים מספר $n_0 \in \mathbb{N} \setminus A$ שהוא קטן ביותר ב- $\mathbb{N} \setminus A$.



מאחר ש- $1 \in A$, הרי ש- $1 \notin \mathbb{N} \setminus A$ ולכן $1 < n_0$ (המספר הקטן ביותר ב- $\mathbb{N} \setminus A$ הוא גדול מ-1 כי $1 \in A$)

אז $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$ (כי $n_0 \geq 2$ שלם)

מאחר ש- n_0 קטן ביותר ב- $\mathbb{N} \setminus A$,

נובע ש- $n_0 - 1$ לא שייך ל- $\mathbb{N} \setminus A$ ולכן $n_0 - 1 \in A$.

אבל לפי התנאי (ב) נקבל ש- $(n_0 - 1) + 1 \in A$ (כלומר $n_0 \in A$) ← סתירה.

לכן ההנחה על קיום $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $n \notin A$ שגויה ולכן $A = \mathbb{N}$.

משפט:

עקרון האינדוקציה - ניסוח אחר

נניח שתכונה מסוימת שמנוסחת לכל n טבעי מקיימת את התנאים הבאים:

1. התכונה נכונה עבור $n=1$
 2. אם התכונה נכונה ל- n טבעי כלשהו אז היא נכונה גם ל- $n+1$
- אז התכונה נכונה לכל n טבעי.

הסבר:

נסמן ב- $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{התכונה נכונה ל-} n\}$

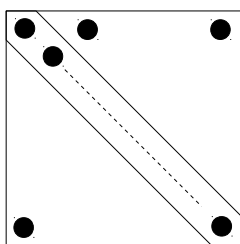
אז A מקיימת את התנאים (א) ו-(ב) ממשפט הקודם ולכן $A = \mathbb{N}$ (כלומר התכונה נכונה לכל n טבעי).

בכללי:

סדרה חשבונית (Arithmetic progression)

http://en.wikipedia.org/wiki/Arithmetic_progression

http://he.wikipedia.org/wiki/סדרה_חשבונית



$$\frac{n-1}{n-2} \cdot \frac{n^2-n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \quad 1+2+\dots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$a, a+d, a+2d, \dots, a+(n-1)d$$

$$S = n \cdot a + d(1+2+\dots+n-1) = na + d \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$

סדרה הנדסית (Geometric progression)

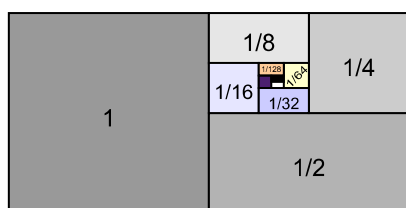
http://en.wikipedia.org/wiki/Geometric_progression

http://he.wikipedia.org/wiki/סדרה_הנדסית

$$(x \neq 1) \quad 1+x+x^2+\dots+x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$$

תרגיל:

להוכיח שלכל n , $\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$



הוכחה:

באינדוקציה.

1. עבור $n=1$ הטענה היא $\ln 2 < 1$ כי $2 < e$ ($\ln e = 1$).
2. נניח שהטענה נכונה ל- n כלשהו ונוכיח שהיא נכונה ל- $n+1$.

$$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \quad \text{כלומר להניח ש-}$$

$$\ln(n+2) < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1} \quad \text{צ"ל ש-}$$

$$\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}}_{> \ln(n+1) \text{ לפי ההנחה}} > \ln(n+1) + \frac{1}{n+1} \quad \text{אכן}$$

$$\ln(n+1) + \frac{1}{n+1} > \ln(n+2) \quad \text{לכן מספיק להוכיח ש-}$$

$$\frac{1}{n+1} > \ln(n+2) - \ln(n+1) \quad \text{וזה שקול ל-}$$

$$\frac{1}{n+1} > \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \quad \text{כלומר ל-}$$

ידוע ש- $\ln(1+x) < x$ לכל $x > 0$ (תוצאה של משפט לגרנז').

בפרט, עבור $x = \frac{1}{n+1}$ נקבל ש- $\ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) < \frac{1}{n+1}$ מ.ש.ל.

הוכחנו שמתוך נכונות הטענה ל- n נובעת הנכונות ל- $n+1$ ולכן הטענה נכונה לכל n טבעי.

תרגיל:

אי שוויון ברנולי

להוכיח שלכל $a > -1$ ולכל n טבעי מתקיים $(1+a)^n \geq 1+na$

הערה:

לפי בינום ניוטון

$$(1+a)^n = 1 + \binom{n}{1}a + \binom{n}{2}a^2 + \dots = 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2 + \dots > \underbrace{1+na}_{a>0 \text{ אם}}$$

שיקול זה לא תקף כאשר $1 < a < 0$

הוכחה:

נבחר $a > -1$ מספר קבוע.

נוכיח עבור a זה, האי שוויון הנתון נכון לכל n טבעי.

נעשה זאת בשיטת האינדוקציה.

1. עבור $n=1$ האי שוויון הוא $(1+a)^1 \geq 1+1 \cdot a$ וזה נכון.
2. נניח שהטענה נכונה עבור n כלשהו, כלומר $(1+a)^n \geq 1+na$ ונוכיח שהטענה נכונה ל- $n+1$ כלומר $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$

אכן $(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a)$ הנחה האינדוקציה ושימוש בעובדה ש- $1+a > 0$ (כי $a > -1$)

$$= 1 + na + a + na^2 = 1 + (n+1)a + \underbrace{na^2}_{>0} \geq 1 + (n+1)a$$

לכן מתוך נכונות הטענה ל- n נובעת נכונות ל- $n+1$ ושכן הטענה נכונה לכל n .

הערה: אם טענה מסוימת נכונה למספר טבעי n_0

ואם נכונות הטענה ל- n נובעת ל- $n+1$

אז הטענה נכונה לכל $n \geq n_0$.

והוכחה דומה לזו של עקרון האינדוקציה

רק שהתפקיד של 1 מסעיף (א) עובר ל- n_0 .

בדרך זו אפשר להוכיח למשל ש-:

$$(1+a)^n > 1+na \quad \text{לכל } n \geq 2 \quad \text{ו-} \quad -1 < a \neq 0.$$

תרגיל: להוכיח שלכל n טבעי, $(1+\frac{1}{n})^n < (1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$.

הוכחה: אינדוקציה.

1. עבור $n=1$ האי שוויון הוא $(1+\frac{1}{1})^1 < (1+\frac{1}{2})^2$. כלומר $2 < \frac{9}{4}$.

הריבוע של מספרים $7|5^2=56|25 \quad 95^2=9025 \quad 125^2=15625$
 כי $(10x+5)^2 = 100x^2 + 100x + 25 = 100x(x+1) + 25$ המסיימים ב-5.

הערה:
$$\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{n^n \cdot (n+2)^{n+1}}{(n+1)^n \cdot (n+1)^{n+1}}$$

$$= \frac{[n(n+2)]^n (n+2)}{[(n+1)(n+1)]^n (n+1)} = \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1} = \left(1 - \frac{1}{\underbrace{n^2+2n+1}_{(1+a)^n \quad a = \frac{-1}{(n+1)^2} > -1}}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1}$$

$$\stackrel{\text{לפי ברנולי}}{>} \left(1 - \frac{n}{\underbrace{n^2+2n+1}_{1+na}}\right)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \frac{n^2+n+1}{\underbrace{(n+1)^3}} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1$$

תרגיל:

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} \text{ סדרה יורדת.}$$

$$\left(\frac{b_n}{b_{n+1}} > 1 \right) \text{ (כמו בתרגיל הקודם, מוכיחים ש-)}$$

מסקנה:

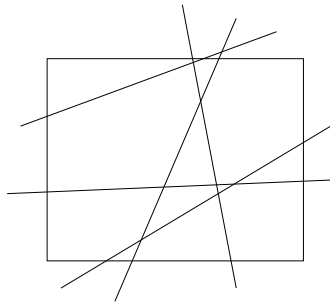
$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ עולה}$$

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \text{ יורדת.}$$

$$b_n = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{a_n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) > a_n \text{ כל } n \text{ כי } a_n < b_n$$

$$a_1 < a_n < b_n < b_1$$

$$2 < \underbrace{a_n}_{(\rightarrow e)} < 4$$



תרגיל:

n ישרים עוברים דרך שטחו של מלבן.
הוכח שניתן לצבוע את השטחים הנוצרים בתוך
המלבן בשני צבעים בלבד, כך שחלקים בעלי
צלע משותפת ייצבעו בצבעים שונים.

הוכחה:

נסמן ב- n את מספר הישרים העוברים דרך המלבן.

אם $n=1$ יש צביעה מתאימה.

נניח שלכל n ישרים קיימת צביעה טובה ונוכיח שיש כזו גם ל- $n+1$ ישרים.

נעבור תחילה n ישרים מתוך ה- $n+1$ ונבחר צביעה נכונה.

כעת נעבור את הישר ה- $n+1$.

בצידו האחד של הישר ה- $n+1$ נחליף את הצבעים,

ובצידו אחר נשמור על הצביע הקודמת.

כך מקבלים צביעה נכונה ל- $n+1$. מ.ש.ל.

נושאים בתורת הקבוצות

השוואת קבוצות: מושג השקילות ומושג העוצמה.

הגדרה: נאמר ששתי קבוצות A, B בן שקולות (או שוות עוצמה) אם קיימת פונקציה הפיכה $f: A \rightarrow B$.
(כלומר קיימת מתאמה חח"ע ועל בין שתי הפונקציות).

הערה: בקורס הזה כל הפונקציות הן פונקציות מלאות.

דוגמה: $B = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $A = \mathbb{N}$
הפונקציה $f: A \rightarrow B$ מוגדרת ע"י $f(n) = 2n$ היא חח"ע ועל.
לכן הקבוצות שקולות.

Quick Reference

אינדקס

ס	א
2.....סדרה הנדסית	3.....אי שוויון ברנולי
2.....סדרה חשבונית	אקסיומה הסדר הטוב ב-N
ע	1.....
1.....עקרון האינדוקציה	ב
	3.....בינום ניוטן