

# חשבון אינפיניטיסמלי ב

מההרצאות של מר' ישראל פרידמן  
מרכז הבינתחומי הרצליה  
סמסטר ב', שנה א', 2009

תאריך עדכון אחרון של קובץ זה הוא

חמישי, 25 פברואר, 2010

עדכונים וכתב הויתור (שווה לקרוא) נמצאים באתר

<http://idc.gadi.cc/compsci/>

הסיכומים הוכנו ע"י גדי כהן  
סטודנט לתואר מדעי המחשב

# תוכן העניינים

|        |                                 |
|--------|---------------------------------|
| 6..... | <a href="#">Quick Reference</a> |
| 7..... | <a href="#">אינדקס</a>          |

|        |                                       |
|--------|---------------------------------------|
| 1..... | <a href="#">שיעור 1 - 25.02.10</a>    |
|        | פונקציות קדומות ואינטגרלים לא מסוימים |
| 1      |                                       |

## שיעור 1 - 25.02.10

### פונקציות קדומות ואינטגרלים לא מסוימים

הגדרה: נניח ש-  $f(x)$  פונקציה המוגדרת בקטע  $I$  (פתוח).  
נאמר שפונקציה  $F(x)$  המוגדרת ב- $I$  היא פונקציה סתומה של  $f$   
אם:  $F'(x)=f(x)$  לכל  $x \in I$ .

דוגמה: למשל אם  $f(x)=5x$  (מוגדרת ב-  $\mathbb{R}$ )  
אז  $F(x)=\frac{5x^2}{2}$  היא פונקציה קדומה של  $f$ .  
וגם  $F_1(x)=\frac{5x^2}{2}+3$  פונקציה קדומה של  $f$ .

הערה: לכל מספר קבוע  $C$ , הפונקציה  $F(x)=2 \cdot 5x^2+C$   
היא פונקציה קדומה של  $f(x)=5x$ .

משפט: אם  $F$  פונקציה קדומה של  $f$  בקטע  $I$   
אז כל פונקציה קדומה של  $f$  היא מהצורה  $F(x)+C$  כאשר  $C$  קבוע.

הוכחה: נניח שגם  $F_1$  פונקציה קדומה של  $f$ , כלומר  $F_1'(x)=f(x)$  לכל  $x \in I$ .  
אז אם נסמן  $G=F_1-F$  נקבל שלכל  $x \in I$   
מתקיים  $G'(x)=F_1'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$

לפי משפט קודם, ידוע שאם  $G$  פונקציה קבועה  
(כלומר קיים  $C$  קבוע כך ש-  $G(x)=C$  לכל  $x \in I$ )  
לכן  $F_1(x)-F(x)=C$  ולכן  $F_1(x)=F(x)+C$  לכל  $x \in I$ .

הגדרה: אם  $F$  פונקציה קדומה של  $f$  נהוג לסמן גם כך:

$$\int f(x) dx = F(x)$$

ונאמר ש-  $\int f(x) dx$  הוא ואינטגרל בלתי מסוים של  $f$ .

## נוסחאות אינטגרציה בסיסיות

$$1. \quad a \neq -1 \quad \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$$

$$2. \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad (\text{הסבר:}) \quad \ln|x| = \begin{cases} \ln(x) & x > 0 \\ \ln(-x) & x < 0 \end{cases} \quad \text{ו-} \quad (\ln|x|)' = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ \frac{1}{-x} & x < 0 \end{cases}$$

$$3. \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1) \quad \text{ובפרט:} \quad \int e^x dx = e^x + C$$

$$4. \quad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$5. \quad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$6. \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$7. \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$8. \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$9. \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$10. \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2+a}) + C$$

## כללי אינטגרציה בסיסים

$$1. \quad \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$2. \quad \int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx$$

## תרגילים

$$\begin{aligned} \int (\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}) dx &= \int (x^{\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{1}{3}}) dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx + 2 \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{(\frac{3}{2})} + \frac{2 \cdot x^{\frac{4}{3}}}{(\frac{4}{3})} + C \\ &= \frac{2}{3} x \sqrt{x} + \frac{3}{2} \sqrt[3]{x} + C \end{aligned} \quad 1.$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2} dx &= \int \left( \frac{x}{x^2} + \frac{\sqrt{x}}{x^2} \right) dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{\sqrt{x}}{x^2} dx = \ln(x) + \int x^{-\frac{3}{2}} dx \\ &= \ln(x) + \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = \ln|x| - \frac{2}{\sqrt{x}} + C\end{aligned}\quad .2$$

$$\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + C \quad .3$$

$$\int e^{x^2} dx \neq \frac{e^{x^2}}{2x} + C \quad \text{הערה:}$$

$$\int \sin(2x+3) dx = \frac{\cos(2x+3)}{-2} + C$$

שאלה: לחשב את  $\int \sin^2 x dx$  : ( יודעים ש-  $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$  )

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2x}{2} + C \quad \text{לכן}$$

### שיטת ההצבה לחישוב אינטגרל

הערה: נניח ש-  $x = g(t)$  ונתונה פונקציה  $f(x)$

$$\text{אז } f(x) = f(g(t))$$

$$\text{ואז } df(x) = f'(x) dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

$$\text{ו- } df(x) = f'(g(t)) \underbrace{g'(t) dt}_{dx} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{df(x)}{dt} = f'(g(t)) \cdot g'(t)$$

לכן אפשר לחשוב שבהחלפת  $x$  ב-  $g(t)$  צריך להחליף את  $dx$  ב-  $g'(t) dt$   
כלומר:  $d(x) = dg(t) = g'(t) dt$

הגדרה: אם  $g$  פונקציה של  $t$  מסמנים את הדיפרנציאל של  $g$

$$\text{כ- } dg(t) = g'(t) \cdot dt \quad \text{ו- } dg(t) = g'(t) \cdot dt$$

מסקנה: אם בחישוב האינטגרל  $\int f(x) dx$  מחליפים את  $x$  ב-  $g(t)$

$$\text{אז את } dx \text{ יש להחליף ב- } g'(t) dt$$

$$\text{כלומר } \boxed{\int f(x) dx = \int f(g(t)) g'(t) dt} \quad \text{כאשר } x = g(t)$$

לכן אם באינטגרל  $\int h(t) dt$  מופיעה פונקציה  $g(t)$  וגם מופיעה הביטוי  $g'(t) dt$  כדאי לנסות להציב  $x = g(t)$ .

## דוגמאות

$$1. \quad a+b=\frac{1}{2}dt \quad dt=2x dx \quad . \quad t=x^2+1 \quad \text{נציב} \quad \int x \sqrt[3]{x^2+1} dx$$

$$\int \sqrt[3]{x^2+1} dx = \int \sqrt[3]{t} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int t^{\frac{1}{3}} dt = \frac{1}{2} \frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{8} (x^2+1)^{\frac{4}{3}} + C$$

$$2. \quad \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} dt \quad \text{לכן} \quad dt = \frac{2}{x^2+1} dx \quad \text{אז} \quad t = 2 \arctan x + 3 \quad \text{נציב} \quad \int \frac{2 e^{\arctan x + 3}}{x^2+1} dx \quad \frac{1}{2} dt$$
$$= \int e^t \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{2 \arctan x + 3}$$

$$3. \quad x^2 dx = \frac{1}{15} dt \quad \Leftrightarrow \quad dt = 15x^2 dx \quad \text{אז} \quad t = 5x^3 + 7 \quad \text{נציב} \quad \int \frac{x^2}{(5x^3+7)^{\frac{3}{5}}} dx \quad \frac{1}{15} dt$$
$$= \frac{1}{15} \int \frac{1}{t^{\frac{3}{5}}} dt = \frac{1}{15} \int t^{-\frac{3}{5}} dt = \frac{1}{15} \frac{t^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}} + C = \frac{1}{6} t^{\frac{2}{5}} + C = \frac{1}{6} (5x^3+7)^{\frac{2}{5}} + C$$

$$4. \quad dt = \frac{1}{x} dx \quad . \quad t = \ln x \quad \text{נציב} \quad \int \frac{(\ln x)^3 dx}{x}$$
$$= \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{(\ln x)^4}{4} + C$$

## שיטת האינטגרציה בחלקים

נניח ש-  $u, v$  פונקציות של  $x$ . אז  $(uv)' = u'v + uv'$  ולכן  $u'v = (uv)' - uv'$

$$\boxed{\int u'v dx = uv - \int uv' dx}$$

## תרגילים

$$1. \quad \begin{cases} u' = 1 \\ v = \ln x \end{cases} \quad \begin{cases} u = x \\ v' = \frac{1}{x} \end{cases} \quad \int \ln x dx$$

$$\int \ln x dx = \overbrace{x \ln x}^{u \cdot v} - \overbrace{\int 1 dx}^{uv'} = x \ln x - x + C$$

$$\begin{cases} u' = \sin x \\ v = x \end{cases} \quad \begin{cases} u = -\cos x \\ v' = 1 \end{cases} \quad \int x \sin x \, dx \quad .2$$

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C$$

$$\begin{cases} u' = \sin x \\ v = e^x \end{cases} \quad \begin{cases} u = -\cos x \\ v' = e^x \end{cases} \quad \int \sin x e^x \, dx \quad .3$$

$$\begin{cases} u' = \sin x \\ v = e^x \end{cases} \quad \begin{cases} u = -\cos x \\ v' = e^x \end{cases} \quad I = \int \sin x e^x \, dx = -e^x \cos x + \underbrace{\int e^x \cos x \, dx}_{\leftarrow}$$

$$= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$$

$$I = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C \quad \text{ולכן} \quad I = e^x (\sin x - \cos x) - I$$

$$\begin{cases} u' = 1 \\ v = 1 - x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} u = x \\ v' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases} \quad \int \sqrt{1-x^2} \, dx \quad .4$$

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = x \sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = x \sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

$$= x \sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = x \sqrt{1-x^2} - I - \arcsin(x)$$

$$I = \frac{1}{2} (x \sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + C \quad \text{לכן}$$

$$\int \sin^3 x \, dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x \, dx = \int (1 - \cos^2 x) \overbrace{\sin x \, dx}^{-dt} \quad .5$$

$$dt = -\sin x \, dx \quad , \quad t = \cos x \quad \text{נציב}$$

$$= -\int (1-t^2) \, dt = -t + \frac{t^3}{3} + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

## Quick Reference



## אינדקס

|                   |                  |
|-------------------|------------------|
| ש                 | ד                |
| 3..... שיטת ההצבה | 3..... דיפרנציאל |