

אלגברה לינארית ב - תרגול

מני אקא
מרכז הבינתחומי הרצליה
סמסטר ב', שנה א', 2009

תאריך עדכון אחרון של קובץ זה הוא

רביעי, 14 אפריל, 2010

עדכונים וכתב הויתור (שווה לקרוא) נמצאים באתר

<http://idc.gadi.cc/compsci/>

הסיכומים הוכנו ע"י גדי כהן
סטודנט לתואר מדעי המחשב

תוכן העניינים

7. תרגילים אבסטרקטיים על גרעין ותמונה.	1. שיעור 1 - 23.02.10
9. הצגת העתקה ע"י מטיצה.	ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של
1. שיעור 5 - 07.04.10 (אחרי פסח)	1. מטריצות.
1. הערות מתרגיל 1.	1. שיעור 2 - 03.03.10
1. שיעור 6 - 14.04.10	2. שיעור 3 - 10.03.10
1. ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים ולכסון.	2. חישוב גרעין ותמונה.
2. שלוש דוגמאות ללכסון.	4. חזרה על וקטור קואורדינטות.
4. אינדקס	7. שיעור 4 - 17.03.10

שיעור 1 - 23.02.10

amenny@idc.ac.il

ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של מטריצות

http://en.wikipedia.org/wiki/Eigenvalue,_eigenvector_and_eigenspace

[http://he.wikipedia.org/wiki/ערך עצמי](http://he.wikipedia.org/wiki/ערך_עצמי)

$$V = \mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right\} \quad \text{מרחב וקטורי. } A \text{ מטריצה ריבועית } n \times n.$$

$$\underbrace{Ax=b}_{\text{פתרון יחיד}} \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow \text{Yank } A=n$$

למדנו:

$$\{\vec{0}\} = \underbrace{\text{nul}(A)}_{\{\vec{x} \mid A\vec{x}=\vec{0}\}}$$

* B מטריצה $n \times n$

$$Bv = \vec{0} \Leftrightarrow \text{קיים וקטורים } V \neq \emptyset \text{ כך ש-} Bv = \vec{0}$$

מטרה: בהנתן מטריצה A, להבין איך A פועלת על וקטורים ולמצוא וקטורים שעליהם היא פועלת באופן פשוט.

$$v \mapsto Av \quad \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{כפל ב-} A} \mathbb{R}^n \quad \text{מה ז"א "פועלת" ?}$$

$$e_1 = (1, 0, 0) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{דוגמה:}$$

$$(1) \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Ae_3 = 3 \cdot e_3 \quad Ae_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2e_2 \quad e_2 = (0, 1, 0)$$

$$A(\underbrace{3e_1+4e_2}_{\text{לינאריות}}) = \underbrace{3Ae_1+4Ae_2}_{\text{סמסטר ב}} = 3 \cdot 2e_1 + 4 \cdot 2e_2 = 2 \cdot (3e_1+4e_2)$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = A(1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + 3 \cdot e_3) = 1 \cdot Ae_1 + 2 \cdot Ae_2 + 3 \cdot Ae_3 = 2e_1 + 2 \cdot 2e_2 + 3 \cdot 3e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

מטרה: בהינתן מטריצה A , מצאו כמה שיותר וקטורים (מטרה אולטימטיבית - למצוא בסיס שלם) שעליהם A פועלת בכפל בסקלר. כלומר, מצאו $V \neq 0$ כך ש- $Av = av$ עבור איזשהו $a \in \mathbb{R}$ (א יכול להיות אפס).

שימו לב: $Av = x \cdot v$ שקול ל- $Av = (xI)v$ $(xI - A)v = 0 \Leftrightarrow Av = \begin{pmatrix} x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} v$

מסקנה: אם $|xI - A| = 0$ אז קיים $v \neq 0$ כל ש- $Av = x \cdot v$.

הוכחה: עשינו (משתמשים ב-*) עבור $B = xI - A$ ובשקילות האחרונה.

דוגמה: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ נבדוק את $|xI - A|$ $xI = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$

$$\left| \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} x-1 & -2 \\ -4 & x-3 \end{pmatrix} \right|$$

$$= (x-1)(x-3) - 8 = x^2 - 4x + 3 - 8 = x^2 - 4x - 5 = (x+1)(x-5)$$

ולכן $x = -1$ או $x = 5$

גילינו שקיים וקטור $v \neq 0$ כך ש- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} v = 5 \cdot v$

וקיים וקטור $w \neq 0$ כך ש- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} w = (-1)w = -w$

נציב 5 ב- $|xI - A|$:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-1 & -2 \\ -4 & 5-3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} v = xv = Av \Leftrightarrow (xI - A)v = 0 \quad v \neq 0$$

נמצא את כל ה-v-ים כך ש- $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} v = 0$:

נעשה $R_2 + R_1 \rightarrow R_2$ ונקבל $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$

$$4x_1 - 2x_2 = 0$$

$$4x_1 = 2 \quad \text{ולכן} \quad x_1 = \frac{1}{2} \quad x_2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

אופס, איבדתי איזה דף פה באמצא

למשל, הוקטור העצמי של הערך המצממי 5 בדוגמה שלנו הוא למשל $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

וקטור עצמי שמתאים לע"ע -1 הוא למשל $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$V = \mathbb{R}^n$. עתה A מטריצה ריבועית.

נסמן $va = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid Av = av, a \in \mathbb{R} \}$

טענה: Va הוא תת מרחב של $\mathbb{R}^n$.

הוכחה: (בוחן)

1. $0 \in Va$ (לה משנה מהו A):

$$A\vec{0} = a \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

2. **סגירות לחיבור**

יהיו $u, w \in Va$. כלומר $Av = av$, $Aw = aw$.

נרצה להראות ש- $A(v+w) = a(v+w)$

נראה זאת: $A(v+w) \underset{\text{לינראיות}}{=} Av + Aw = av + aw = a(v+w)$

3. **כפל בסקלר**

מאוד דומה. תרגול.

ניסוח מחדש של המטרה:

בהינתן מטריצה A:

1. מצאו עבור אלה סקלרים a, המרחב V_a הוא לא מרחב האפס (אלו הערכים העצמיים).

2. עבור אותם a-ים ש- $v_a = \{0\}$, מצאו בסיס למרחב (אלו הוקטורים העצמיים).

$$Av = xv \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

דוגמה:

נחפש את הערכים העצמיים של A. מהו $|xI - A| = 0$?

$$= \begin{vmatrix} x-1 & -5 \\ -5 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^2 - 25 = 0$$

ולכן $x = -5$ או $x = 6$.

עברנו על (א) במטרה.

כלומר $\dim V_{-4} > 0$ ו- $\dim V_6 > 0$

ולכל סקלר אחר $a \neq 6, -4$, $\dim V_a = 0$ כלומר $V_a = 0$.

$w = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \dim W = 0$

(ב) של המטרה: למצוא בסיס ל- V_6 ו- V_{-4} .

שלב זה: פתרון מערכת משוואות.

בסיס ל- V_6 :

אלו כל הוקטורים המקיימים $Av = 6v$ ובאופן שקול $(6I - A)v = 0$.

זוהי מערכת משוואות, נפתור אותה:

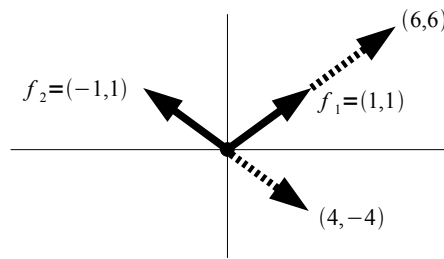
$$\begin{pmatrix} 6-1 & -5 \\ -5 & 6-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 + R_1 \rightarrow R_2} \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$sp\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \in V \quad x_2 = 1 \quad x_1 = 1$$

בסיס ל- V_{-4} : נפתור את $(-4I - A)$

$$\begin{pmatrix} -4-1 & -5 \\ -4-1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ -5 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ונגיע לפתרון הכללי $sp\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ולכן $v_4 = sp\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



$$(1, 0) = \frac{1}{2}(f_1 - f_2)$$

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}(Af_1 - Af_2) \\ &= \frac{1}{2}(6f_1 + 4f_2) \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

דוגמה 3x3:

נשים מטרה (א) נפתור את $|xI - A| = 0$:

$$\begin{aligned} &\left| \begin{pmatrix} x+1 & -2 & -2 \\ -2 & x-2 & 1 \\ -2 & 1 & x-2 \end{pmatrix} \right| \xrightarrow[C_3 - (x-2)C_2 \rightarrow C_3]{C_1 + 2C_2 \rightarrow C_1} \left| \begin{pmatrix} x+1-4 & x & -2+2(x-2) \\ -2+2x-4 & x & 1-(x-2)^2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right| \\ &\left| \begin{pmatrix} x+1 & -2 & -2 \\ -2 & x-2 & 1 \\ -2 & 1 & x-2 \end{pmatrix} \right| \xrightarrow[C_3 - (x-2)C_2 \rightarrow C_3]{C_1 + 2C_2 \rightarrow C_1} \left| \begin{pmatrix} x+1-4 & x & -2+2(x-2) \\ -2+2x-4 & x & 1-(x-2)^2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right| \\ &= -(x-3)^2 \cdot (-(x-1)-4) = -(x-3)^2(x+3) \end{aligned}$$

ולכן $x=3$ (פעמיים) או $x=-3$ (פעמיים). סיימנו את (א).

מטרה (ב) ע"מ למצוא את V_3 : נפתור את $(3I - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3+1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Sp\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = V_3$$

$$x_2 = 0, x_3 = 1 \text{ אז } x_1 = \frac{1}{2} \quad \text{אם}$$

$$x_2 = 1, x_3 = 3 \text{ אז } x_1 = \frac{1}{2} \quad \text{אם}$$

שיעור 2 - 03.03.10

חסר בנתיים.

שיעור 3 - 10.03.10

חישוב גרעין ותמונה

תרגיל: חשב את הגרעין ואת התמונה של העתקה הגזירה מ- $\mathbb{R}_{n+1}[x] \rightarrow \mathbb{R}_n[x]$

פתרון: נסמן ב- $D: \mathbb{R}_{n+1}[x] \rightarrow \mathbb{R}_n[x]$ את העתקת הגזירה, כלומר $D(p(x)) = p'(x)$.

$$\ker D = \{p(x) \mid p'(x) = 0\} = \{a_0 \mid a_0 \in \mathbb{R}\}$$

כלומר הפולינומים הקבועים ממימד 1. $\ker D = \text{sp}(1)$

$$D(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) = a_1 + 2a_2 x + \dots + a_n x^{n-1} \quad \text{מתאפס כש- } a_1 = \dots = a_n = 0 \text{ כולם אפסים}$$

התמונה תהייה ממימד ? $(n+1) - 1 = n$ נבדוק מהי.

אנו יודעים שמתקבלים כל הפולינומים ממעלה $n-1 \geq$.

למשל, התמונה של הפולינום $x^{i-1} \xrightarrow{D} \frac{1}{i} x^i$ לכל $0 \leq i \leq n$

ולכן $x^0, x^1, \dots, x^{n-1} \in \text{Im}(D)$ ולכן $\text{Im}(D) \subseteq \text{Sp}(x^0, x^1, \dots, x^{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[x]$

$n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[x]$ ולכן יש בעצם שוויון כאן $\uparrow$

כלומר $\text{Im} D = \text{Sp}(x^0, \dots, x^{n-1})$

תרגיל: תהי $T: \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}_n[x]$, $p(x) \mapsto p(x+1) - p(x)$ חשבו את הגרעין והתמונה.

הסבר: לדוגמה: $x^2 \xrightarrow{T} (x+1)^2 - x^2 = x^2 + 2x + 1 - x^2 = 2x + 1$

$$x \mapsto (x+1) - x = 1$$

$$x^3 + 3 \mapsto (x+1)^3 + 3 - (x^3 + 3)$$

$$x^2 + x \mapsto (x+1)^2 + (x+1) - (x^2 + x)$$

באופן כללי:

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \xrightarrow{T} a_0 + a_1(x+1) + \dots + a_n(x-1)^n - (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n)$$

$3 \mapsto 3 - 3 = 0$ שוב, הפולינומים ממעלה 0 נמצאים בגרעין של T.

$\ker T = \{p(x) \mid p(x+1) = p(x)\}$ יהי $p(x) \in \ker T$ אז $p(x) = p(x+1)$

נציב $x=0$: $p(0) = p(1)$ נציב $x=1$: $p(1) = p(2)$

$$p(k)=p(k+1) \quad \text{נציב } x=k \quad p(2)=p(3) \quad \text{נציב } x=2$$

$p(x)-t$. נתבונן ב- $q(x)=p(x)-p(0)$. זה פולינום עם אינסוף שורשים.

$$q(1)=p(1)-p(0)=0, \quad q(0)=p(0)-p(0)=0 \quad \text{כי}$$

$$p(k)=p(k)-p(x)=0 \quad \dots \quad q(2)=p(2)-p(0)=0$$

$$\text{כלומר } p(k)=p(0)=t \text{ לכל } k$$

כל $k \in \mathbb{N}$ הוא שורש של q ולכן q הוא פולינום האפס.

מכאן נובע ש- $p(x)-p(0)=0$ $p \leq$ הוא פולינום הקבוע שערכיו תמיד $p(0)$.

כלומר p פולינום הע"ע ממעלה 0 ולכן $\ker T = \{a_0 \mid a_0 \in \mathbb{R}\}$

ממשפט המימד נובע שמימד $\text{Im} T = n$

$$\begin{aligned} T(p(x)) &= p(x+1) - px \\ x^2 &\mapsto (x+1)^2 - x^2 = x^2 + 2x + 1 - x^2 = 2x + 1 \\ x^3 &\mapsto (x+1)^3 - x^3 = x^3 + \dots - x^3 = 2 \\ \underbrace{(2x)^3}_{8x^3} &\mapsto (2+(x+1))^3 - (2x)^3 = 2^3 x^3 + \dots - 2^3 x^3 \end{aligned}$$

המשך הפתרון:

נשים לב, שהמקדם של החזרה הכי גבוהה בפולינום $p(x+1)$ שווה

למקדם של החזרה הכי גבוהה בפולינום $p(x)$.

ולכן חזרה זו מתבטלת בפולינום $T(p(x))=p(x+1)-p(x)$

"פסודו הוכחה"

באופן יותר נורמלי אפשר לכתוב כך:

קל לראות שהתמונה של x^i הוא פולינום ממעלה x^{-1}

(למשל לפי הבינום של ניוטון). $(x+1)^i - x^i = \dots$

בנוסף, זהו בסיס ל- $\overline{\mathbb{R}_n[x]^{x_0, \dots, x_n}}$ וראינו כי $\text{Im} T = \text{Sp}(T(x^1), \dots, T(x^n))$

אלו פולינומים ממעלה $n-1 \geq$ ולכן $\mathbb{R}_n[x] \subset \mathbb{R}_{n-1}[x] \subseteq \text{Im} T$

ומשוויון המימד יש שוויון כאן $\uparrow$

חזרה על וקטור קואורדינטות

טענה:

יהי V מ"ו, והי $v_1, \dots, v_n$ בסיס סדור של V .
אז לכל וקטור $v \in V$ יש כתיבה יחידה כצירוף לינארי של הבסיס.

הוכחה:

מכך שהבסיס פורש, ישנם סקלרים $a_1, \dots, a_n$

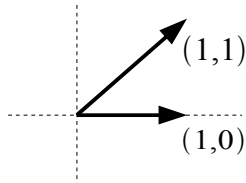
$$* \quad v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

נניח ש- $v = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$ ** ונראה ש- $b_1 = a_1, b_2 = a_2, \dots, b_n = a_n$.

$$0 = v - v = (b_1 v_1 + \dots + b_n v_n) - (a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) \\ = (b_1 - a_1) v_1 + \dots + (b_n - a_n) v_n$$

נחסר את * מ-**: :

מכיוון ש- $v_1, \dots, v_n$ בת"ל נקבל ש- $\underline{b_i = a_i = 0}$ לכל i .



$$B = \{(1,0), (1,1)\}$$

$$\begin{bmatrix} 17 \\ \pi \end{bmatrix} = 17(1,0) + \pi(1,1)$$

$$B = (17,0) + (\pi, \pi) = (17+\pi, \pi)$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 3e_1 + 4e_2 = (3,4) \quad \text{יהי } E = \{(1,0), (0,1)\} \text{ הבסיס הסטנדרטי:}$$

יהי $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס סדור ל- V

אז וקטור הקואורדינטות לפי B של וקטור $v \in V$ מסומן ב- $[v]_B$

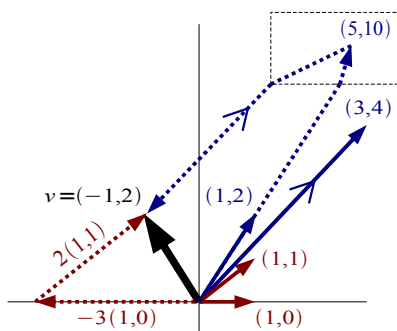
והוא ה- n -יה של המקדמים בצירוף לינארי לפי B המייצג את הוקטור v .

דוגמה:

ניקח בסיסים סדורים של $\mathbb{R}^2$:

$$E = ((1,0), (0,1)) \quad D = ((1,0), (1,1)) \quad B = ((1,2), (3,4))$$

ונמצא את וקטור הקואורדינטות לפי הבסיסים אלו של הוקטור $v = (-1, 2)$.



$$[v]_E = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow v = \underline{-1}(1,0) + \underline{2}(0,1) = (-1, 2)$$

$$[v]_D = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow v = \underline{-3}(1,0) + \underline{2}(1,1) = (-1, 2)$$

$$[v]_B = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow v = \underline{5}(1,2) + \underline{-2}(3,4) = (-1, 2)$$

תרגיל:

1. (נדלג עליו) הוכח ש- $B = \{1+x, x+x^2, x^2+x^3, 2x^3\}$ בסיס ל- $\mathbb{R}_3[x]$.

2. מצאו את $[v]_B$ כאשר $B = 3+2x+x^2+3x^3$

פתרון ב:

$$\begin{aligned} v &= 3+2x+x^2+2x^3 \\ &= \lambda_1(1+x) + \lambda_2(x+x^2) + \lambda_3(x^2+x^3) + \lambda_4 2x^3 \end{aligned}$$

$$[v]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \leftarrow \quad \begin{matrix} \lambda_1=3 \\ \lambda_2=-1 \\ \lambda_3=2 \\ \lambda_4=0 \end{matrix} \quad \left\{ \begin{matrix} \lambda_1=3 \\ \lambda_1+\lambda_2=2 \\ \lambda_2+\lambda_3=1 \\ \lambda_3+2\lambda_4=2 \end{matrix} \right.$$

עוד דוגמאות: $[v]_E = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftarrow E = \{1, x, x^2, x^3\}$ $[v]_{E'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftarrow E' = \{x^3, x, x^2, 1\}$

שאלה 6 מהמבחן: $u = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a+b=c+d=0 \right\}$

1. הוכיחו ש- v מרחב לינארית.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\} \quad C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

2. מצא את וקטור הקואורדינטות של $u = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ לפי B ולפי C .

3. נדלג.

פתרון:

1. v מרחב לינארית עם בסיסים $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$

ישנם שני נתאים על $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ע"מ שהוא תהיה ב- u .

$$1. \quad a+b=0 \quad \text{ולכן} \quad b=-a$$

$$2. \quad c+d=0 \quad \text{ולכן} \quad d=-c$$

כלומר ברגע שקבענו את a ו- c , b ו- d נקבעים.

לכן מטריצה כללית ב- u היא מהצורה $u = \begin{pmatrix} a & -a \\ c & -c \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbb{R}$

נוכיח ש- B בסיס: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ בת"ל.

פירושים: תהי $\begin{pmatrix} a & -a \\ c & -c \end{pmatrix} \in u$ כלשהי. $\begin{pmatrix} a & -a \\ c & -c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

עתה ע"מ להנמש C בסיס ונשים לב שהוקטור ב- C בת"ל

ושהרגע הראנו ש- $\dim u = 2$

2. מההגדרה נובע כי $[u]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ כי $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \underbrace{a_1}_{\substack{2 \\ 2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \underbrace{a_2}_{\substack{3 \\ 3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

כי $[u]_C = \begin{bmatrix} 2\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \underbrace{a_1}_{\substack{2 \\ 2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \underbrace{a_2}_{\substack{3 \\ 3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

שיעור 4 - 17.03.10

תרגילים אבסטרקטיים על גרעין ותמונה

(רמז: כבר עשינו אותם)

תרגיל: תהיינה $S: W \rightarrow U$, $T: V \rightarrow W$ העתקות לינאריות.

$$\text{הוכיחו כי } \ker T \subseteq \ker(S \circ T)$$

הסבר:

$$V \xrightarrow{T} W \xrightarrow{S} U$$

$$\quad \quad \quad \searrow \quad \quad \nearrow$$

$$\quad \quad \quad S \circ T$$

פתרון:

$$\ker T = \{x \in V \mid T(x) = 0_w\}$$

$$\ker S \circ T = \{x \in V \mid S \circ T(x) = 0_u\}$$

$$\text{יהי } x \in \ker T \text{ אז } T(x) = 0_w$$

$$\text{ולכן } S \circ T(x) = S(T(x)) = S(0_w) = 0_u$$

$$\text{לכן } x \in \ker(S \circ T)$$

תרגיל: תהיינה $S: W \rightarrow U$, $T: V \rightarrow W$ כך ש- $S \circ T = 0$ זו העתקת האפס מ- V ל- U .

$$x \mapsto 0_w \xrightarrow{S} 0_u \quad (S \circ T = 0)$$

$$\text{הראו ש- } \text{Im } T \subseteq \ker S$$

פתרון: יהי $x \in \text{Im } T$ אז קיים $y \in V$ כך ש- $T(y) = x$

$$\text{לכן } S(x) = S(T(y)) = S \circ T(y) = 0_u$$

$$\text{לכן } x \in \ker S \text{ מ.ש.ל.}$$

תרגיל: יהי V מ"ו ותהי $T: V \rightarrow V$ כך ש- $T^2 = T \circ T = 0$ הגדרה

$$\text{הראו ש- } \dim \ker T \geq \frac{\dim V}{2}$$

פתרון: על פי טענה קודמת $\text{Im } T \subseteq \ker T$ ולכן $\dim \text{Im } T \leq \dim \ker T$

$$\text{ע"ע משפט המימד } \dim \text{Im } T + \dim \ker T = \dim V$$

$$\text{נסמן } n = \dim V \text{ נרשום:}$$

$$n = \dim \text{Ker} T + \dim \text{Im} T \leq \dim \text{Ker} T + \dim \text{Ker} T = 2 \dim \text{Ker} T$$

$$\frac{n}{2} \leq \dim \text{Ker} T \quad \text{כמו שרצינו. מ.ש.ל.}$$

זה "שקול"/דומה לתרגיל שעשינו בסמסטר הקודם:

$$A \text{ מטריצה ריבועית } n \times n. \text{ אם } A^2 = 0 \text{ אז } \frac{n}{2} \leq \dim \text{Null}(A)$$

תרגיל: תהיינה $T: V \rightarrow V$, $S: V \rightarrow V$ כך ש- $S \rightarrow T = 0$ * . $\dim V = 4$.
הראו ש- $2 \geq \dim \text{Im}(T \circ S)$

פתרון: מספיק שנראה ש- $\dim \text{Ker}(T \circ S) \geq 2$ (בגלל משפט המימד)

$$\ker S \leq \ker(T \circ S) \text{ . לכן אם } \dim \text{Ker} S \geq 2 \text{ אז סיימנו.}$$

$$\text{אם } \dim \text{Ker} S = 1 \text{ אז } \dim \text{Im} S = 3$$

$$\text{אם } \dim \text{Ker} S = 0 \text{ אז } \dim \text{Im} S = 4$$

נטפל במקרה בו $\dim \text{Ker} S = 0$. למדנו שזה שקול מכך ש- S חח"ע.

מכך ש- $S: V \rightarrow V$ נובע שהיא גם על. לכן S הפיכה.

$$T = 0 \Leftrightarrow S^{-1} S \circ T = S^{-1} 0 \text{ ונקבל ש-}$$

$$\dim \text{Im}(T \circ S) \geq 2 \text{ ולכן } T \circ S = 0$$

$$\text{נניח ש- } \dim \text{Ker} S \leq 1 \text{ . ידוע לכן ש- } S \circ T = 0$$

$$\text{ראינו שבמקרה זה } \text{Im} T \subseteq \text{Ker} S \text{ ולכן } \dim \text{Im} T \leq 1 \text{ **}$$

טענת עזר: תהיינה $T: V \rightarrow W$, $S: W \rightarrow U$, אז $\dim \text{Im} S \circ T \leq \dim \text{Im} T$

[ההוכחה כתרגיל]

המשך: אם נשתמש בטענת עזר, נקבל ש- $1 \leq \dim \text{Im} T \leq \dim \text{Im}(T \circ S)$ (לפי **) וסיימנו.

הצגת העתקה ע"י מטיצה

למדנו שבהנתן $T: V \rightarrow W$, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס ל- V ו- $C = \{w_1, \dots, w_n\}$ בסיס ל- W .

קיימת מטריצה סמסומנת $[T]_B^C$ ומקיימת $[T]_C^B = [T]_C^B [V]_B$

יתר עלכן, למדנו ש- $[T]_C^B = [T_{v_1}]_C [T_{v_2}]_C \dots [T_{v_n}]_C$

דוגמה: תהי $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $(x, y) \mapsto (5x + y, x + 5y)$

יהי $E = \{e_1, e_2\} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ הבסיס הסטנדרטי.

$$A = \{(1, 1), (1, -1)\}$$

$$B = \{(1, 1), (0, 1)\}$$

תרגיל: כתבו את $[T]_E^E$, $[T]_A^A$, $[T]_B^B$

יהי $v = (1, 2)$ וודאו ש- $[T]_A^A = [T]_A^A [V]_A$

פתרון: נתחיל ב- $[T]_E^{E=e_1, e_2}$:

$$[T]_E^E = [T_{e_1}]_E [T_{e_2}]_E$$

$$[T_{e_1}]_E = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftarrow \quad T_{e_1} = T(1, 0) = (5, 1) = 5 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2$$

$$[T_{e_2}]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \Leftarrow \quad T_{e_2} = T(0, 1) = (1, 5) = 1 \cdot e_1 + 5 \cdot e_2$$

$$\text{tr} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = 10, \quad \det \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = 24, \quad [T]_E^E = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

נעבור ל- $[T]_A^A$.

$$[T]_A^A = [T(1, 1)]_A [T(1, -1)]_A$$

$$T(1, 1) = (6, 6) = \underline{6} (1, 1) + \underline{0} (1, -1)$$

$$[T(1, 1)]_A = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} T(1, -1) &= (5 \cdot 1 - 1, 1 + 5(-1)) = (4, -4) \\ &= \underline{0} (1, 1) + \underline{4} (1, -1) \end{aligned}$$

$$[T(1, -1)]_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{[T]_A^A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}} \quad \text{שימו לב שזו מטריצה אלכסונית.}$$

$$\text{tr} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 10, \quad \det \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 24$$

נשאיר לעצמו את $[T]_B^B$

$$(I) \quad T(1,2)=T_v=(7,11)$$

$$[T]_A^A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{נבדוק זאת ע"י}$$

$$\begin{aligned} (1,2) &= \underline{a}(1,1) + \underline{b}(1,-1) \\ &= (a+b, a-b) = (1,2) \quad [V]_A \quad \text{ראשית נבדוק מיהו} \\ 2a &= \underline{i} \end{aligned}$$

$$[V]_A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$2a=3 \quad a=1\frac{1}{2}$$

$$1\frac{1}{2} + b = 1$$

$$\underline{b = -\frac{1}{2}}$$

$$[T_v]_A \quad \text{לכן מיהו}$$

$$(II) \quad [T_v]_A = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = [T]_A^A [V]_A$$

$$[T_v]_A = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{נבדוק שלא טעינו, כלומר מכך ש-}$$

$$T_v = 9(1,1) = 2(1,-1) = (7,11) \quad V(tick)$$

$$[[T_{01}]_B [T_{02}]_B] = [T]_{B=(g_1, g_2)}^{A=(f_1, f_2)} \quad \text{נבדוק}$$

$$[T_{f1}]_B = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad <= \quad T_{f1} = T(1,1) + (6,6) = \underline{6}(1,1) + \underline{0}(0,1)$$

$$[T_{f2}]_B = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix} \quad <= \quad T_{f2} = T(1,-1) = (4,-4) = \underline{4}(1,1) + \underline{-8}(0,1)$$

$$[T]_B^A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

$$tr \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} = -2 \quad det \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} = -48$$

בניח כי $T: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^2$ מוגדרת ע"י $T(p(x)) = \begin{pmatrix} p'(0) + p(0) \\ p'(0) - p(0) \end{pmatrix}$

- מצאו בסיס ל- $\text{Im}T$. מהו $\dim \text{Im}T$?
- מצאו בסיס ל- $\text{Ker}T$. מהו $\dim \text{Ker}T$?
- האם T חח"ע על?
- מצא את המטריצה המייצגת את T לפי הבסיסים הסטנדרטים $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}_2[x]$.

פתרון:

א. מצאו בסיס ל- $\text{Im}T$. מהו $\dim \text{Im}T$?

למדנו שאם $\{f_1, f_2, f_3\}$ בסיס ל- $\mathbb{R}_2[x]$ אז $\text{Im}T = \text{Sp}\{T_{f_1}, T_{f_2}, T_{f_3}\}$

יהי $\{f_1, f_2, f_3\}$ הבסיס הסטנדרטי $f(1)=1$ $f(2)=x$ $f(3)=x^2$

$$T_{x^2} = \begin{pmatrix} 0+0 \\ 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad T_x = \begin{pmatrix} 1+0 \\ 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad T_1 = \begin{pmatrix} 0+1 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Im}T = \text{Sp}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \text{Sp}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \text{ קיבלנו}$$

קל לראות שהם בת"ל ולכן הם בסיס לתמונה. ולכן המימד של $\text{Im}T=2$

ב. מצאו בסיס ל- $\text{Ker}T$. מהו $\dim \text{Ker}T$?

ראינו ש- $\dim \text{Ker}T=1$ ומצאנו ש- $x^2 \in \text{Ker}T$ ולכן $\{x^2\}$ בסיס ל- $\text{Ker}T$.

ג. האם T חח"ע על?

הוא על ממה שהרגע ראינו.

ממשפט המימד נובע ש- $\dim \text{Ker}T=1$ ולכן הוא אינו חח"ע.

ד. מצא את המטריצה המייצגת את T לפי הבסיסים הסטנדרטים

$$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}_2[x]$$

$$\text{מקודם: } 1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad x \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad x^2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \\ [T_1]_{\mathcal{C}} T_x \\ \mathcal{C} \\ \mathbb{R}^2 \\ [T]_{E_{\mathbb{R}_2[x]}^{E_{\mathbb{R}^2}}} = \mathcal{C} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R}^2 \\ [T_1]_{\textcolor{red}{i}} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_{\textcolor{red}{i}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

ובאופן סאוסן נקבל

$$\begin{array}{c} \textcolor{red}{i} \\ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \\ [T]_{E_{\mathbb{R}^2}}^{E_{\mathbb{R}^2[x]}} = \textcolor{red}{i} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + -1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

שיעור 5 - 07.04.10 (אחרי פסח)

הערות מתרגיל 1

כדי להראות שהעתקה היא לינארית:

1. משמרת חיבור: $T(v+w) = T(v) + T(w)$
2. משמרת כפל בסקלר: $T(\alpha v) = \alpha T(v)$
3. $T(\vec{0}) = \vec{0}$ - זה נובע מ-1 ו-2. לכן כדי להראות ש-T אינה לינארית אפשר למשל להראות שוקטור האפס לא עובר לוקטור האפס.

שמחפשים מטריצה שמייצגת העתקה $T(x, y, z) = (3x, 4y+8z, x+y+z)$ $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 4y+8z \\ x+y+z \end{pmatrix}$

נזכור: אפשר לנחש $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ולכן $\begin{pmatrix} ax+by+cz \\ dx+ey+fz \\ \dots \end{pmatrix} \Leftarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 4y+8z \\ x+y+z \end{pmatrix}$

אפשר להזכר שמטריצה שאנחנו מחפשים זו מטריצה הייצוג לפי הבסיס הסטנדרטי: $[T]_E^E$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ Te_1 & Te_2 & Te_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

עוד משהו: ~~$|AB| = |A||B|$ $|A \pm B| = |A| \pm |B|$~~ לא נכון

הערות מתרגיל 2:

נתונה העתקה לינארית ע"י כפל במטריצה A. מקבשים למצוא את תמונת ההעתקה. למדנו שזה בדיוק המרחב $\text{col}(A)$.

דוגמה: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftarrow T(x, y, z) = (3x+y, 4x+8z)$

$$Te_3 = \begin{matrix} \text{עמודה} \\ \text{השלישית} \end{matrix} \quad Te_2 = \begin{matrix} \text{עמודה} \\ \text{השנייה} \end{matrix} \quad Te_1 = \begin{matrix} \text{עמודה} \\ \text{הראשונה} \end{matrix}$$

$$\text{ידועים ש: } \text{Im} T = \text{sp}(Te_1, Te_2, Te_3) = \text{col}(A)$$

כדי למצוא בסיס למרחב העמודות אפשר לדבר לפי שורות ובעמודות בהם מקבלים איבר פותח עמודות המטריצה המקורית יהיו בסיס.

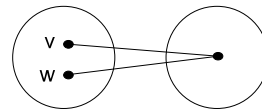
$$\text{col}(A) = \text{sp}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \text{ ולכן } \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow R_2 - \frac{4}{3}R_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & 8 \end{pmatrix}$$

שאלה 6: $S: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ על. $S(1,1,0)=(1,2)$ $S(1,0,2)=(2,4)$ מצאו בסיס ל- $\ker S$.

פתרון: ממשפט המימד ומכך ש- S על נקבל ש-
 $3 = \dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker S + \dim \text{Im} S$
 $= \dim \ker S + \dim \text{set } \mathbb{R}^2$
 $= \dim \ker S + 2$

ונקבל ש- $\dim \ker S = 1$

(נכון בלינאריות) $\vec{0} = T(v) - T(w) = T(v-w) \in T(v) = T(w)$



$$S(2(1,1,0)) = 2S(1,1,0)$$

↓

$$S(2,2,0) = (2,4)$$

מלינאריות

$$S(1,0,2) = (2,4) \text{ וגם נתון}$$

ולכן $S(1,2,-2) = S((2,2,0) - (1,0,2)) = S(2,2,0) - S(1,0,2) = (2,4) - (2,4) = \vec{0}$
 ולכן $(1,2,-2)$ בסיס ל- $\ker S$.

שאלה 5: נתונים $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ ומגדירים $T: \mathbb{R}^n \rightarrow V$

$$(a_1, \dots, a_n) \rightarrow \sum_{i=1}^n a_i v_i = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

$$(3,5,8) \rightarrow 3v_1 + 5v_2 + 8v_3$$

שאלה דוגמה לשאלות הליכסון בתרגול 4

תזכורת: בהנתן $T: V \rightarrow W$ ו- $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס ל- V ו- $C = \{w_1, \dots, w_m\}$ בסיס ל- W

אז המטריצה $[T]_C^B = [Tv_1]_C \dots [Tv_n]_C$ מקיימת $[T]_C^B [V]_B = [Tv]_C$

בנוסף: אם $S: W \rightarrow V$ ו- $D = \{u_1, \dots, u_m\}$ בסיס ל- U .

אז $[S]_D^C \circ [T]_C^B = [S \circ T]_D^B$

תרגיל: יהיו $v_1 = \{1, 2, 3\}$ $v_2 = \{0, 1, 2\}$ $v_3 = \{0, 0, 1\}$ בסיס ל- $\mathbb{R}^3$ שנמנו ב-B.

מצאו את $[I]_E^B$ ו- $[I]_B^E$ כאשר $I: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ העתקת הזהות.

הקדמה: ראשית נזכר ש- $*$ נובע ש- $[I]_E^E = I$ $[I]_E^B \circ [I]_B^E = [I \circ I]_E^E = [I]_E^E = I$

כלומר אלו מטריצות הופכיות זו לזו.

מכיוון ש- $[v]_E = V$ (ב- $\mathbb{R}^n$) תמיד קל יותר למצוא את $[I]_E^B$

כלומר, כאשר E הוא הבסיס של הטווח, יותר קל למצוא את המטריצה המייצגת

בפתור: $[I]_E^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ כי $[(1, 2, 3)]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \dots$

עתה כדי למצוא את $[I]_B^E$ אפשר למצוא את המטריצה $[I]_E^B$

או לחילופין למצוא אותה מההגדרה.

נמצא מההגדרה: $[I]_B^E = [[e_1]_B [e_2]_B [e_3]_B]$

$$[e_3]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (0, 0, 1) = e_3 = a(1, 2, 3) + b(0, 1, 2) + c(0, 0, 1)$$

$$[e_2]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (0, 1, 0) = a(1, 2, 3) + b(0, 1, 2) + c(0, 0, 1)$$

$$[e_1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (1, 0, 0) = a(1, 2, 3) + b(0, 1, 2) + c(0, 0, 1)$$

$$[I]_B^E = [[e_1]_B [e_2]_B [e_3]_B] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ ולכן}$$

כדאי לבדוק ע"י הפל שאכן הן הופכיות.

נעשה תרגיל דומה ונדבר (על-הדרך) על ליכסון.

מטרה: נתונה $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ואנחנו רוצים למצוא מטריצה שדומה ל-A שהיא גם אלכסונית.

לתהליך זה קוראים ליכסון של A. אם מצליחים אומרים ש-A **לכסינה**.

כלומר, מחפשים מטריצה הפיכה P כך שהמטריצה $P^{-1}AP$ מטריצה אלכסונית.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

איך נעשה זאת?

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad . \quad T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{מגדירה } A \text{-ש-} T$$

מי זו $[T]_E^E$? נשים לב שזו פשוט A .

$$[T]_E^E = [Te_1]_E \dots$$

$$Te_1 = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[Te_1]_E = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[T]_C^C = [I]_C^E \underbrace{[T]_E^E [I]_E^C}_{= [T \circ I]_E^C = [T]_E^C} \quad \text{נשים לב שאם } C = \{v_1, v_2, v_3\} \text{ בסיס אחר של } \mathbb{R}^3 \text{ אז מתקיים}$$

$$[I]_C^E [T]_E^C = [T]_C^C$$

$$[I]_C^E [T]_E^C [I]_E^C = [T]_C^C \quad \text{כאשר } (T=A) \text{ ונרצה ש- } [T]_C^C \text{ תהיה אלכסונית.}$$

$$[T]_C^C \text{ אלכסונית כאשר וקטורי } C$$

הם וקטורים עצמיים של העתקה T כלומר וקטורים עצמיים של A .

נמצא בסיס C המורכב מוקטורים עצמיים של A :

עלינו למצוא את הערכים העצמיים:

$$\det(xI - A) = \begin{vmatrix} x & 0 & 2 \\ -1 & x-2 & -1 \\ -1 & 0 & x-3 \end{vmatrix} = (x-2) \begin{vmatrix} x & 2 \\ -1 & x-2 \end{vmatrix} = (x-2)^2 (x-1)$$

לכל ערך עצמי, נמצא וקטורים עצמיים:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{דירוג}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{עבור } x=2 \text{ זה מרחב האפס של}$$

ובסיס למרחב האפס הוא $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_1 = (-1, 0, 1)$

$$\text{נבדוק: } A \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 9 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{עבור } x=1 \text{ נקבל את הוקטור } v_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ כוקטור עצמי (אפשר לוודא).}$$

קיבלנו שיש 3 וקטורים עצמיים וע"פ משפט הנלמד, הם בהכרח מהווים בסיס (אפשר לבדוק ישירות). נסמן בסיס זה ב- $C = \{v_1, v_2, v_3\}$

נבדוק מה $[T]_C^C = \square$.

$$\text{לפי ההגדרה } [T]_C^C = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ Tv_1 \\ \vdots \end{bmatrix}_C & \begin{bmatrix} \vdots \\ Tv_2 \\ \vdots \end{bmatrix}_C & \begin{bmatrix} \vdots \\ Tv_3 \\ \vdots \end{bmatrix}_C \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Tv_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{חשוב}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = Tv_1 = av_1 + bv_2 + cv_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Tv_2 = T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Tv_2 = 0v_1 + 2v_2 + 0v_3$$

$$[Tv_2]_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Tv_3 = T \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Tv_3 = 0v_1 + 0v_2 + 1v_3$$

$$[Tv_3]_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[T]_C^C = \left(\begin{bmatrix} \vdots \\ Tv_1 \\ \vdots \end{bmatrix}_C \begin{bmatrix} \vdots \\ Tv_2 \\ \vdots \end{bmatrix}_C \begin{bmatrix} \vdots \\ Tv_3 \\ \vdots \end{bmatrix}_C \right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ולכן}$$

$$[T]_C^C = [I]_E^C [T]_E^E [I]_C^E = [I]_E^C A [I]_C^E \quad \text{יודעים ש-}$$

ולחשב את $[I]_E^C$ זה קל:

$$\underbrace{[I]_E^C}_P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

סה"כ מצאנו P ש $P^{-1}AP$ מטריצה אלכסונית

לזה קוראים **לכסיין** של A .

שיעור 6 - 14.04.10

ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים ולכסון

תזכורת: $T: V \rightarrow V$, $v \neq 0$ ונקרא ו"ע אם $Tv = \alpha v$. α נקרא הע"ע של v .
 A מטריצה ריבועית. $v \neq 0$ נקרא ו"ע אם $Av = \alpha v$. α נקרא הע"ע של v .

תרגיל: הראו ש- A לא הפיכה אם 0 ערך עצמי של A .

פתרון: קיים $v \neq 0$ כך ש- $Av = 0 \cdot v = \vec{0}$ אם"ם קיים פתרון לא טריביאלי למע' ההומוגנית ש- A מגדירה, כלומר $\ker(A) \neq \{\vec{0}\}$ אם"ם A לא הפיכה.

הערה: זה לא אומר כלום לגבי לכסון.

למשל, מטריצת האפס הוא אחלה מטריצה אלכסונית, וגם $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

תרגיל: אם λ ע"ע של העתקה T אז λ^n ע"ע של $T^n = \underbrace{T \circ \dots \circ T \circ T}_{n \text{ פעמים}}$

פתרון: קיים $v \neq 0$ כך ש- $Tv = \alpha v$.

$$T^n(v) = \underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_{n \text{ פעמים}}(v) = T \circ T \circ \dots \circ T(\underbrace{\lambda v}_{n-1 \text{ פעמים}}) = \dots = \lambda^n v$$

$$\underbrace{T(\lambda^k v)}_{\text{לינאריות}} = \lambda^k Tv = \lambda^k \cdot \lambda \cdot v = \lambda^{k+1} v$$

תרגיל: תהי $T: V \rightarrow V$ ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$ כלשהו. הראו ש- $v_2 := \{v \in V \mid Tv = \alpha v\}$ הוא תת מרחב של V . תת-מרחב זה נקרא **המרחב העצמי של α** .

פתרון: זהו הגרעין של ההעתקה $\alpha I_d - T$ $[Tv - \alpha v = 0 \Rightarrow (T - \alpha I)v = 0]$ מדוע? אם $Tv = \alpha v \Leftrightarrow \alpha - T(v) = \alpha I_d(v) - T(v) = (\alpha I_d - T)v = 0$

תזכורת: אם $T, S: V \rightarrow W$ ו- S העתקה לינארית אז

$$T + S(v) := T(v) + S(v)$$

$$T - S(v) := T(v) - S(v)$$

ואלו העתקות לינאריות. $(\alpha I_d - T)(v)$

פתרון אחר: בוחן לתת מרחב.

$$T(v+w) = T(v) + T(w) = \alpha v + \alpha w = 2(v+w) \quad T\vec{0} = \alpha\vec{0}$$

השלימו את הערטים...

שלוש דוגמאות ללכסון

דוגמה 1: נרצה למצוא את הערכים העצמיים של A ואז לכל ערך עצמי למצוא ו"ע התאים לא.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

פתרון: כדי למצוא ע"ע $\leftarrow$ הפולינום האופייני.

$$\begin{aligned} x_1 = 2 \text{ בריבוי } 3 \\ x_2 = 1 \text{ בריבוי } 4 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad |xI - A| = \begin{vmatrix} (x-3) & -2 & 0 \\ 0 & (x-3) & 0 \\ 0 & 0 & (x-4) \end{vmatrix} = (x-3)^2(x-4)$$

הערה: שימו לב שבמטריצה משולשית הע"ע מופיעים על האלכסון.

נמצא את הוקטורים העצמיים המתאימים לערך העצמי 4.

בעצם מה שנרצה לעשות, זה למצוא בסיס ל-4.

$$(\mathbb{R}^3)_4 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid Av = 4v\} = \text{nul}(4I - A)$$

$$\begin{pmatrix} 4-3 & -2 & 0 \\ 0 & 4-3 & 0 \\ 0 & 0 & 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{nul}() = \text{sp} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

עבור $x=3$ נחשב את $(\mathbb{R}^3)_3 = \text{nul}(3I - A)$

$$\text{nul} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{sp} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

שימו לב שהתקבל מרחב ממימד 1 למרות הערך העצמי 3 הוא בריבוי 2

נזכר שע"מ ללכסון את A עלינו למצוא בסיס של ו"ע של A .

שימו לב שלא ניתן למצוא כזה בסיס. מדוע? ראינו שו"ע חייבת להיות או ב-
 v_3

$$\text{sp} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = V_3 + V_4 \neq \mathbb{R}^3 \quad \text{אבל} \quad \text{או ב- } v_4.$$

לכן לא ניתן למצוא בסיס של וקטורים עצמיים.

דוגמה 2:

$$|(xI - A)| = (x-1)^2 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

יש ע"ע יחיד והוא שווה ל-1, מופיע בריבוי 2.

אפשר ללכסן את A אם"ם קיים בסיס ל- $\mathbb{R}^2$ המורכב מו"ע של A.

כל הוקטורים העצמיים יחיו במרחב העצמי של 1:

$$(\mathbb{R}^2)_1 = \text{nul}(1I - A) = \text{nul} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \text{nul} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{sp} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(3,0), (4,0), (-\sqrt{2},0), (-\pi^e,0)$$

אין בסיס ל- $\mathbb{R}^2$ המורכב מוקטורים עצמיים!!!

לכן לא ניתן ללכסן!

שימו לב, שהריבוי של 1 הוא 2

ומימד המרחב העצמי של 1 הוא קטן לא שווה מ-2.

דוגמה 2:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -1 & -6 & -2 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{למצוא ע"ע, כלומר שורשי הפולינום האופייני:}$$

$$|(xI - A)| = \begin{vmatrix} (x-4) & 0 & -1 \\ 1 & (x+6) & 2 \\ -5 & 0 & x \end{vmatrix} = (x+6) \begin{vmatrix} x-4 & -1 \\ -5 & x \end{vmatrix} = (x+6)[(x-4)x-5]$$

$$= (x+6)(x^2-4x-5) = (x+6)(x-5)(x+1) \quad x_{1,2,3} = -6, 5, -1$$

נתחיל ב- $x = -6$:

$$\text{nul} \begin{pmatrix} -10 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -5 & 0 & -6 \end{pmatrix} \supseteq \text{sp} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

מוודאים ע"י דירוג שקודם יש שוויון.

$$\text{nul} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 11 & 2 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \stackrel{\text{דירוג}}{=} \{(t, -\frac{3}{11}, t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \text{nul}(5I - A) = \text{sp} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{11} \\ 1 \end{pmatrix} : x=5$$

$$\text{nul} \begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -5 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{Sp} \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ -\frac{9}{25} \\ 1 \end{pmatrix} = \text{Sp} \begin{pmatrix} -5 \\ -9 \\ 25 \end{pmatrix} : x=1$$

נרמה לרשום את P כך ש- $P^{-1}AP$ אלכסונית, ולמצוא את P^{-1} .

מי תהיה P. $[T_A]_B$ $[T_A]_E$

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$$

$$B = \{ \underbrace{(0,1,0)}_{v_1}, \underbrace{(1, -\frac{3}{11}, 1)}_{v_2}, \underbrace{(-\frac{1}{5}, -\frac{9}{25}, 1)}_{v_3} \}$$

$$[T_A]_B = [I]_B^E [T_A]_E [I]_E^B$$

$$[I]_E^B = \begin{pmatrix} [v_1]_E & [v_2]_E & [v_3]_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 1 & -\frac{3}{11} & -\frac{9}{25} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & 0 & \frac{5}{6} \\ -\frac{4}{55} & 1 & \frac{19}{35} \\ -\frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

הרבה עבודה.... (1 דירוג (P|I) או (2 adj

הערה:

זו דוגמה כל כך שאם יש מטריצה $n \times n$ ולה יש ע"ע שונים זה מזה אז הוא לכסינה. זהו תנאי מספיק! ולא הכרחי, כלומר זה לא אם ורק אם.

דוגמה 3:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |xI - A| &= \begin{vmatrix} x & -1 & -1 \\ -1 & x & -1 \\ -1 & -1 & x \end{vmatrix} \stackrel{c_3 \rightarrow c_3 - c_2}{=} \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ -1 & x & -1-x \\ -1 & -1 & x+1 \end{vmatrix} \stackrel{c_1 \rightarrow c_1 + xc_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1+x^2 & x & -1-x \\ -(1+x) & -1 & x+1 \end{vmatrix} \\ &= (1+x) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ (x-1) & x & -1-x \\ -1 & -1 & x+1 \end{vmatrix} = (1+x) \begin{vmatrix} x-1 & -(1+x) \\ -1 & x+1 \end{vmatrix} = (1+x) \underbrace{(x^2-1)-(1+x)}_{x^2-x-2} \\ &= (1+x)(x-2)(x+1) \end{aligned}$$

2. בריבוי $x=-1$

1. בריבוי $x=2$

$$: x=-1$$

$$\text{nul}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{דירוג}}{=} \text{nul}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (-s-t, t, s)$$

$$(\mathbb{R}_3)_{-1} = Sp\begin{pmatrix} (-1,0,1) \\ (-1,1,0) \end{pmatrix} \quad \text{מסקנה:}$$

$$\text{nul}(2I-A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (\mathbb{R}^3)_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V_\alpha := \{v \in V \mid Tv = \alpha v\}$$

$$B=\{(1,1,1), (-1,1,0), (-1,0,1)\} \quad \text{נבחר}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ההופכית} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

"אלגוריתם" ללכסון

A מטריצה $n \times n$.

(1) מוציאים פולינום אופיינו וערכים עצמיים.

$$\begin{array}{lll} \text{שורשים שונים } x_1, \dots, x_k & r_1 + \dots + r_k = n & P_A = (x - x_1)^{r_1} \dots (x - x^k)^{r_k} \\ r_2 = 2 \quad r_2 = 1 & x_1 = 1 \quad x_2 = 2 & (x+1)^2(x-2) \end{array}$$

(2) מוציאים את V_{x_i} לכל x_i

אם לכל $r_i = \dim V_{x_i}$ ניתן ללכסן האחד הבסיסים ש V_{x_i} בסיס מלאכן.
אם לא אז אי אפשר.

אינדקס

מ	ל
1.....מרחב העצמי	3.....לכסינה