

אלגברה לינארית ב - הרצאות

מההרצאות של מר' מני אקא
מרכז הבינתחומי הרצליה
סמסטר ב', שנה א', 2009

תאריך עדכון אחרון של קובץ זה הוא

ראשון, 11 אפריל, 2010

עדכונים וכתב הויתור (שווה לקרוא) נמצאים באתר

<http://idc.gadi.cc/compsci/>

הסיכומים הוכנו ע"י גדי כהן
סטודנט לתואר מדעי המחשב

תוכן העניינים

8.....	מטריצות מעבר ודומיין מטריצות.
12.....	וקטורים עצמיים וערכים עצמיים.
13.....	שיעור 5 - 08.04.10 (אחרי פסח)
13.....	נושאי הקורס.
13.....	סיכום קצרה על העתקות לינאריות.
16.....	ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.
	מציאת ערכים עצמיים וקטורים עצמיים
18.....	של מטריצות.
20.....	להתעלם מדף הזה :
21.....	Quick Reference
22.....	אינדקס

1.....	שיעור 1 - 25.02.10
1.....	מרחבים וקטורים.
1.....	העתקות לינאריות (Linear maps).
6.....	גרעין ותמונה של העתקה לינארית.
1.....	שיעור 3 - 11.03.10
	מציאת מטריצה המייצגת העתקה לינארית
1	
2.....	כיצד נקבעת העתקה לינארית.
4	מציאת מטריצה המייצגת העתקה כללית
6.....	שיעור 4 - 18.03.10
	על ייצוג העתקה (כללית) העזרת
6.....	מטריצות.

שיעור 1 - 25.02.10

מני אקא, amenny@idc.ac.il

70% מרתגילים הטובים - 10% מהציון.

מבחן אמצע מגן - 10%.

תרגיל מפורסם ברביעי-חמישי ומגשים ביום א' שבוע וחצי אחרי.

ספרות

אוניברסיטה פתוחה - אלגברה לינארית I - בפקרים האחרונים.

אוניברסיטה הפתוחה - אלגברה לינארית למדעי הטבע.

Google: Linear Algebra MIT course

שעות קבלה - בתיאום מראש

רביעי - 8:00-10:00

שישי - 8:30-10:00

לשלוח מייל.

מרחבים וקטורים

$$\mathbb{R}^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in \mathbb{R} \right\} .$$

• מרחבים וקטורים כלליים יותר:

• מרחבי פונקציות

• פולינומים

• מרחב המטריצה

(תזכורת בהמשך)

העתקות לינאריות (Linear maps)

(שם אחר: טרנספורמציות לינאריות - Linear transformation)

1. פונקציות וקטוריות

כמאור, $\mathbb{R}^n$ זוהי קבוצה. ניתן להגדיר פונקציות בין $f: \underbrace{\mathbb{R}^n}_{\text{תחום}} \rightarrow \underbrace{\mathbb{R}^n}_{\text{טווח}}$.

כלומר f לוקחת וקטור ב- $\mathbb{R}^n$ לוקטור ב- $\mathbb{R}^n$

2. דוגמאות:

- (א) $(x, y) \mapsto (x+y, 3x+5y, 2y) \quad F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$
- (ב) $(x, y, z) \mapsto (x+y, x-z) \quad G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$
- (ג) V מ"ו, $B: V \rightarrow V$ היא העתקת הניסוח ב-2.
- (ד) כלומר, וקטור $w \in V$ עובר ע"י B לוקטור $2w \in V$.
- (ה) למשל, $V = \mathbb{R}^2$ אז $B: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $(x, y) \mapsto (2x, 2y)$
- (ו) $(a, b) \mapsto (4a+7b, a-b) \quad H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
- (ז) $(x, y) \mapsto (x \sin(y), x^2 y) \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
- (ח) $(a, b) \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ a+b & b^2 \end{pmatrix} \quad g: \mathbb{R} \rightarrow M_2(\mathbb{R})$
- (ט) $(a, b) \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ a+b & b \end{pmatrix} \quad h: \mathbb{R}^2 \rightarrow M_2(\mathbb{R})$
- (י) $p(x) \mapsto p'(x) \quad d: \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}_n[x]$
- (כ) $R_n[x] = \{ \text{פולינום מעל } \mathbb{R} \text{ ממעלה קטנה שווה ל-} n \}$

3. נדבר על הרכבת פונקציות - בקצרה (נחזור לזה).

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow F \rightarrow R^3 \rightarrow G \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto F \mapsto (x+y, 3x+5y, 2y) \mapsto G \mapsto (4x+6y, x-y)$$

4. פונקציות "הולכות" מקבוצה לקבוצה. אבל מרחב וקטור זו לא סתם קבוצה!

$$G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{בתבונן ב-(ב):}$$

$$\begin{aligned} G(v) &= (7, 2) & v &= (3, 4, 1) \\ G(w) &= (0, -1) & w &= (0, 0, 1) \\ G(\underbrace{v+w}_{\mathbb{R}^2}) &= G(\underbrace{V}_{\mathbb{R}^2}) + G(\underbrace{W}_{\mathbb{R}^2}) = (7, 1) & v+w &= (3, 4, 2) \end{aligned}$$

G "מכבדת" את תכונת חיבור הוקטורי.

$$G(7V) = (4, 9, 14) \quad 7V = (21, 28, 7)$$

$$G(7V) = 7 \cdot G(V) \quad \text{קיבלנו ש-}$$

G "מכבדת" את הכפל בסקלר.

הגדרה: יהיו V, W מרחבים וקטורים. פונקציה $F: V \rightarrow W$ תקרא **העתקה ליניארית** אם:

1. $F(v_1 + v_2) = F(v_1) + F(v_2)$ $v_1, v_2 \in V$ מתקיים
2. $F(\alpha v) = \alpha F(v)$ $v \in V$ ולכל $\alpha \in \mathbb{R}$ מתקיים

טענה: תהי $T: V \rightarrow W$ העתקה לינארית אז:

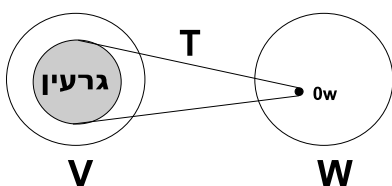
$$1. \quad T(\vec{0}_v) = \vec{0}_w$$

$$2. \quad T(-v) = -T(v)$$

הוכחה: נתחיל ב-(2). זה נובע פשוט מההגדרה:

$$T(-v) = T((-1) \cdot v) \stackrel{\text{לינאריות}}{=} (-1)T(v) = -T(v)$$

עתה נוכיח את:



$$T(\vec{0}_v) = T(\vec{0}_v + \vec{0}_v) \stackrel{\text{לינאריות (1)}}{=} T(\vec{0}_v) + T(\vec{0}_v)$$

$$T(\vec{0}) = \vec{0}_w \quad \text{נעביר עגף ונקבל:}$$

$$0v + 0v = 0v$$

תרגיל אופייני הוא לבדוק האם עתקה היא לינארית.

הערה: אם העתקה לא מעבירה את וקטור האפס לוקטור האפס אז היא לא לינארית.

5. העתקה לינארית

$$T(v+w) = T(v) + T(w) \quad \forall v, w \in V$$

$$T(\alpha v) = \alpha T(v) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v \in V$$

$$f(v) = (2\sin(2), 8) \quad v = (2, 2)$$

$$f(3(2, 2)) = (6\sin(6), 216)$$

$\neq$

$$3 \cdot f(2, 2) = (6\sin 2, 24)$$

א. העתקה לינארית ונקח $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} F((x, y) + (x', y')) &= F(x + x', y + y') \\ &= (x + x' + y + y', 3x + 3x' + 5y + 5y', 2y + 2y') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x, y) + F(x', y') &= (x + y, 3x + 5y, 2y) + (x' + y', 3x' + 5y', 2y') \\ &= (x + x' + y + y', 3x + 3x' + 5y + 5y', 2y + 2y') \end{aligned}$$

אקסיומת השנייה:

$$F(\alpha(x, y)) = F(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x + \alpha + y, 3\alpha x + 5\alpha y + 2\alpha y)$$

$$\alpha F(x, y) = \alpha(x + y, 3x + 5y, 2y)$$

ב. לינארית

ג. לינארית

ד. לינארית

ה. לא.

ו. לא. b^2

ז. לינארית.

ח. לינארית, כי:

$$(p(x) + q(x))' = p'(x) + q'(x)$$

$$(\alpha \cdot p(x))' = \alpha p'(x)$$

ט. דוגמה: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $(x, y) \mapsto (x, y + 1, x + y)$

$(0, 1) \mapsto (0, 1, 0) \neq \vec{0}$ ומהטענה שראינו נובע שזו לא העתקה לינארית.

5. תמונה של צירוף לינארי

תהי $T: V \rightarrow W$. לכל $v \in V$ הוקטור $w = T(v)$ נקרא התמונה של v .

מה התמונה של צ"ל:

יהיו $v_1, \dots, v_n \in V$ ויהיו $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ צירוף לינארי.

נרצה לדעת מיהו:

$$T(v) = T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) \stackrel{\text{באינדוקציה מההגדרה}}{=} \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \dots + \alpha_n T(v_n)$$

נסביב במקרה $n=2$

$$T(\alpha v + \beta v') \stackrel{(1)}{=} T(\alpha v) + (\beta v') \stackrel{(2)}{=} \alpha T(v) + \beta T(v')$$

מסקנה: תהי $T: V \rightarrow W$ העתקה לינארית.

אם $v_1, \dots, v_n \in V$ תלויים לינארית

אז $T(v_1), \dots, T(v_n) \in W$ גם כן תלויים לינארית.

הוכחה: בדף הבא.

הוכחה: מהנתון, קיימים $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ שלא כולם אפסים כך ש- $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$.
נפעיל את T ונקבל: $\alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_n T(v_n) = T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = T(\vec{0}) = \vec{0}$
מכיוון שלא כל ה- α -ות הן אפס, נובע ש- $T(v_1), \dots, T(v_n)$ תלויים לינארית.

דוגמה חשובה: **העתקת האפס.** יהיו V, W מרחב וקטורי ונגדיר $T: V \rightarrow W$ $v \mapsto 0_W$
זו העתקה לינארית. $\vec{0} = T(v+w) = T(v) + T(w) = \vec{0} + \vec{0}$ (תרגול)

ההפך לא נכון. כלומר את $T: V \rightarrow W$ העתקה לינארית
ו- $v_1, \dots, v_n \in V$ בת"ל אז לא דווקא נובע ש- $T(v_1), \dots, T(v_n)$ בת"ל.
למשל, העתקת אפס. $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $(x, y) \rightarrow (0, 0)$

טענה: תהי $T: V \rightarrow W$ ויהי $v_1, \dots, v_n$ בסיס ל- V .
אם ידוע מיהם $T(v_1), \dots, T(v_n)$, כלומר, (במילים אחרות), אם ידוע
תמונה של בסיס, אז אני יכול לדעת לאן T מעבירה כל וקטור.

דוגמה: עמ' 12 של ציפי.
יהי $v_1 = (1, 0, 0)$ $v_2 = (1, 1, 0)$ $v_3 = (1, 1, 1)$ בסיס ל- $\mathbb{R}^3$.
נתונה $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ וידוע ש- $T(v_1) = (-1, 1)$ $T(v_2) = (3, 0)$ $T(v_3) = (0, 1)$
צריך למצוא את $T(8, 11, 7)$ לכל a, b, c .

ראשית, נמצא איך נכתב לפי איברי הבסיס.
 $(8, 11, 7) = c_1(1, 0, 0) + c_2(1, 1, 0) + c_3(1, 1, 1) = (c_1 + c_2 + c_3)$
 $c_1 = -3$ $c_2 = 4$ $c_3 = 7$
 $T(8, 11, 7) = T(-3v_1 + 4v_2 + 7v_3)$
 $\stackrel{\text{לינאריות}}{=} -3T(v_1) + 4T(v_2) + 7T(v_3)$
 $= -3(-1, 1) + 4(3, 0) + 7(0, 1)$
 $= \dots$

הוכחה: יהי $v \in V$. נכתוב את V בצ"ל של $v_1, \dots, v_n$: $V = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$
נבדוק מהו $T(V)$: $T(V) = T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) \stackrel{\text{לינאריות}}{=} \alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_n T(v_n)$
מכיוון ש- $T(v_1), \dots, T(v_n)$ ידוע לי, אני יכול לחשב את $T(V)$ מהביטוי האחרון.
מ.ש.ל.

אם כל $W = \mathbb{R}^m$ $V = \mathbb{R}^n$ תהי A מטריצה $m \times n$ אז היא מגדירה העתקה לינארית

הדוגמאות: שנסמנה ב- T_A . $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. $v \mapsto Av$

$$(A)_{m \times n} \begin{pmatrix} \vdots \\ v \\ \vdots \end{pmatrix}_n = \begin{pmatrix} \vdots \\ Av \\ \vdots \end{pmatrix}_m$$

צריך לבדוק $T_A(v+w) \stackrel{?}{=} T_A(v) + T_A(w)$

מה כתוב כאן? $A(v+w) \stackrel{?}{=} Av + Aw$ וזה ראינו בסמסטר קודם.

$T_A(\alpha v) \stackrel{?}{=} \alpha T_A(v)$ וזה שקול למה שאנחנו יודעים $A(\alpha v) = \alpha A(v)$

"?" כי צריך לבדוק אם זה לינארי.

בתרגול: דוגמאות מסיכומים של ציפי - 12-15.

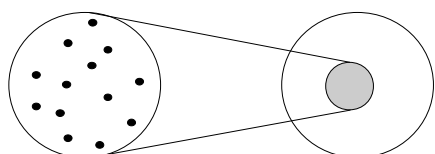
גרעין ותמונה של העתקה לינארית

גרעין = kernel, תמונה = image

תהי $T: V \rightarrow W$ העתקה לינארית. נגדיר:

1. **הגרעין** (kernel) של T הוא

$$\{v \in V \mid T(v) = \vec{0}\} \text{ וימסומן בתור } \text{Ker}(T).$$



2. **התמונה** של T מוגדרת להיות

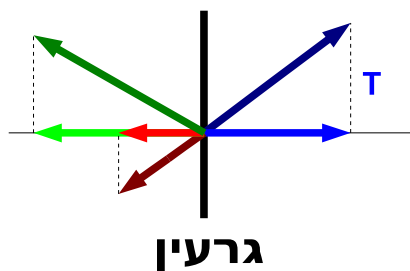
$$\text{Im} T = \{w \in W \mid \exists v \in V \text{ s.t. } Tv = w\} = \{T(v) \mid v \in V\}$$

דוגמה: $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $T(x, y) = (x, 0)$

נבדוק מהו $\text{ker} T$.

$$\begin{aligned} \text{ker} T &= \{(x, y) \mid T(x, y) = (0, 0)\} \\ &= \{(x, y) \mid (x, 0) = (0, 0)\} \\ &= \{(x, y) \mid x = 0\} = \text{ציר ה-y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Im} T &= \{T(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(x, 0) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{ציר ה-x} \end{aligned}$$



“דוגמה”: תהי A מטריצה $m \times n$. ראינו שהיא מגדירה העתקה $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ $v \mapsto Av$.

$$\ker(T_A) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid T_A(v) = \vec{0}\} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid Av = \vec{0}\} = \text{null}(A) = \left\{ \begin{array}{l} \text{מרחב האפס} \\ \text{של מטריצה } A \end{array} \right\}$$

בשפה של מערכות משוואות $\ker T_A$ אלו בדיוק הפתרונות של מערכת המשוואות ההומוגנית ש- A מגדירה.

$$\text{Im}(T_A) = \{Av \mid v \in \mathbb{R}^n\}$$

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ v_1 & \cdots v_n \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ Av \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ \alpha_1 v_1 & \cdots \alpha_n v_n \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

משפטים

1. $\ker T$ תת מרחב של V ו- $\text{Im} T$ תת מרחק של W .
2. משפט "שימור האנרגיה" משפט הדרגה והאפסות
3. $\dim(\ker T) + \dim(\text{Im} T) = \dim V$

הוכחת 1: (א) $\ker T \subseteq V$ תת מרחב.

נשתמש הבוחן לתת מרחב.

1. צ"ל ש- $\vec{0} \in \ker T$.

כלומר יש להראות ש- $T(\vec{0}) = \vec{0}$ (לכל העתקת הלינאריות).

כבר ראינו.

2. סגירות לחיבור: אם $v, w \in \ker T$ אז צ"ל $v + w \in \ker T$

$$T(v+w) \underset{\text{לינאריות}}{=} T(v) + T(w) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

3. סגירות לכפל בסקלר: $T(\alpha v) \underset{\text{לינאריות}}{=} \alpha T(v) = \alpha \vec{0} = \vec{0}$

(ב) $\text{Im} T \subseteq W$ תת מרחב: $\text{Im} T = \{w \mid \exists v \in V, T(v) = w\}$

1. $0w \in \text{Im} T$ כי $T(0_v) = 0_w$ (תמיד).

2. $w_1, w_2 \in \text{Im} T$ צ"ל $w_1 + w_2 \in \text{Im} T$

$$\exists v_2, T(v_2) = w_2 \quad \exists v_1, T(v_1) = w_1$$

$$T(v_1 + v_2) \underset{\text{לינאריות}}{=} T(v_1) + T(v_2) = w_1 + w_2$$

כלומר, מצאנו וקטור ב- V (הוקטור v_1, v_2) שתמונתו $w_1 + w_2$ ולכן $w_1 + w_2 \in \text{Im} T$. נמצא ב- $\text{Im} T$.

(ג) צ"ל $w \in \text{Im} T$ אז $\alpha w \in \text{Im} T$ לכל $\alpha \in \mathbb{R}$
הוכחה: מהנתון, קיים $v \in V$ כך ש- $T(v) = w$
 נתבונן ב- αV , תמונה היא:

$$T(\alpha V) = \underbrace{\alpha T(V)}_{\text{לינאריות}} = \alpha w$$

 כלומר αw אכן נמצא בתמונה.
 מ.ש.ל.

שיעור 3 - 11.03.10

(באדיבות ז'רמי אבוהי)

מציאת מטריצה המייצגת העתקה לינארית

$$T(x, y, z) = (x + y, x - z) \quad \text{דוגמה:}$$

המטרה למצוא $A \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ כך שלכל $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ מקיים $T\vec{x} = A\vec{x}$.

כלומר למצוא $A \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ כך ש- $T = T_A$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-z \end{pmatrix} \quad \text{נמצא אותה ע"י ניחוש:}$$

ננסה למצוא דרך כללית יותר ושנוכל להכליל אותה למציאת מטריצה ביחס לבסיסים כלליים. נשים לב שעמודות:

העמודה השלישית

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

העמודה השנייה

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

העמודה הראשונה

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

משפט: תהי $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ העתקה לינארית. אז קיימת מטריצה $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ כך

שלכל $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $T\vec{x} = A\vec{x}$. יתר על כן, A היא מטריצה שעמודיה הן

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ Te_1 & Te_2 & \cdots & Te_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

הערה: שימו לב שיש פה שימוש בבסיס הסטנדרטי. זה אמור להעלות תהיות

למה היה קורה אם היינו משתמשים בבסיס אחר.

כלומר $e_1, \dots, e_n$ זהו הבסיס הסטנדרטי

של התחום של T , שהוא $\mathbb{R}^n$.

$$e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

הוכחה: יהי $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ כלשהי.

נשים לב לעובדה הבאה: $\vec{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$

נפעיל את T ונקבל $T\vec{x} = T(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 T(e_1) + \dots + x_n T(e_n) = *$

נתבונן במטריצה A שבעמודה ה- i שלה היא $T(e_i)$.

זו אכן מטריצה מסדר $m \times n$

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ Te_1 & \cdots & Te_n \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot T(e_1) + \dots + x_n \cdot T(e_n) = * : A\vec{x}$$

נבדוק מהו $A\vec{x}$:

$$= T\vec{x}$$

סה"כ קיבלנו $T\vec{x} = A\vec{x}$ לכל $\vec{x} \in \mathbb{R}$ מ.ש.ל.

כיצד נקבעת העתקה לינארית

תהי $T: V \rightarrow W$ והי $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס ל- V .
אם ידועות לנו תמונות איברי B אז ניתן לדעת תמונה של כל צ"ל שלהם.
כלומר, תמונת T לכל וקטור ב- V .

מסקנה: יהיו $T: V \rightarrow W$ ו- $S: V \rightarrow W$ העתקות לינאריות, והי $v_1, \dots, v_n$ בסיס ל- V .
אז $S = T$ $\Leftrightarrow S(V_i) = T(V_i)$ לכל $i = 1, 2, \dots, n$

כלומר, זה אותה העתקה כלומר, הן מסכימות על איברי הבסיס

הוכחה: $\Leftarrow$ טריביאלי. $S = T$ אומר שלכל $v \in V$, $S(v) = T(v)$
ובפרט $S(v_i) = T(v_i)$ לכל $i = 1, 2, \dots, n$

$\Rightarrow$ יהי $v \in V$ כלשהו. אז קיימים $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ כך ש- $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$

$$\begin{aligned} T(v) &= T(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = a_1 T(v_1) + \dots + a_n T(v_n) \\ &= \underbrace{a_1 S(v_1) + \dots + a_n S(v_n)}_{\text{לינאריות}} = S(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = S(v) \end{aligned}$$

דוגמה: מצאו העתקה לינארית $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ כך ש- $T(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$T(x, y) = (2x - y, 4x + y) \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ Te_1 & Te_2 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

תשובה: כל העתקה מהצורה $\cdot \begin{pmatrix} 2 & * \\ 4 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

שימו לב שמצאנו שאת e_2 אני יכול לשלוח לאיפה שבא לי, באופן מתמטי -
אני יכול לבחור את תמונת e_2 בחופשיות.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad T(e_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad T(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 3T(e_1) = T \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{\text{איז מצב}}{=} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} \quad T(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

משפט:

$$v \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

V מ"ו ו- $v_1, \dots, v_n$ בסיס ל- V . יהי $v \in V$ וקטור כלשהי.
יש ל- V כתיבה יחידה בצירוף לינארי של $v_1, \dots, v_n$.
כלומר אם $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ אז ה- a_i ים יחידים תלויים רק ב- v .

הוכחה:

נתחיל ביחידות:

נניח שקיימת שתי העתקות $S: T \rightarrow W$, $T: V \rightarrow W$
ששתיהן מקיימות $1 \leq i \leq n$ $S(v_i) = w_i$, $1 \leq i \leq n$ $T(v_i) = w_i$
נשים לב שבפרט זה אומר ש- S ו- T מסכמות על איברי הבסיס $v_1, \dots, v_n$.
מהמשפט האחרון נובע ש- $S=T$. כלומר הוכחנו יחידות.

הוכחת הקיום:

נגדיר T כזו. ראשית נגדיר $T(v_i) = w_i$ לכל $1 \leq i \leq n$.
עתה נרצה להגדיר את $T(v)$ לוקטור כללי $v \in V$.
יהי V וקטור כלשהו $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$
כאשר $a_1, \dots, a_n$ נקבעו ביחידות לפי הוקטור v .
היחידות של $a_1, \dots, a_n$ את האפשרות לתגור.

$$T(v) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} a_1 T(v_1) & + & \dots & + & a_n T(v_n) \\ \parallel & & & & \parallel \\ a_1 w_1 & + & \dots & + & a_n w_n \end{cases}$$

T מוגדר היטב מכוון שהמקדמים $a_1, \dots, a_n$ תלויים רק בוקטור v .
נותר לנו להוכיח ש- T לינארית. נתחיל בלהראות שהיא מכבדת חיבור:

יהי $v, u \in V$ וקטורים כלשהם ב- V . צ"ל $T(v) + T(u) = T(v+u)$.
נכתוב את $v+u$, u, v כצירופים לינאריים של $v_1, \dots, v_n$.

$$u = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n \quad b_i \in \mathbb{R} \quad v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \quad a_i \in \mathbb{R}$$

$$v+u = (a_1+b_1)v_1 + \dots + (a_n+b_n)v_n$$

$$\begin{aligned} T(v) + T(u) &:= (a_1 w_1 + \dots + a_n w_n) + (b_1 w_1 + \dots + b_n w_n) \\ &= (a_1 b_1) w_1 + \dots + (a_n b_n) w_n \end{aligned}$$

$$T(v+u) := (a_1+b_1)w_1 + \dots + (a_n+b_n)w_n$$

כלומר T שומרת על פעולת חיבור.

נוסיף עוד פס להוכחה:

$$T(v_j) \stackrel{\text{def}}{=} 0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + \dots + 1 \cdot w_j + 0 \cdot w_{j+1} + \dots + 0 \cdot w_n = w_j$$

$$v_j = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 1 \cdot v_j + 0 \cdot v_{j+1} + \dots + 0 \cdot v_n$$

שתי הגדרות מסכימות.

דוגמה:

$$\underbrace{(1,2,3)}_{Te_1}, \underbrace{(1,2,3)}_{Te_2}, \underbrace{(1,2,3)}_{Te_3} \quad \mathbb{R}^3 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^3$$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (x+y+z) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{Im} T = S \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

דוגמה:

$T(v_i) = \vec{0}$ לכל i . כלומר $w_i = 0$ לכל i . מה נקבל?

$$T(v) = a_1 w_1 + \dots + a_n w_n = a_1 \vec{0} + \dots + a_n \vec{0} = \vec{0}$$

$$\swarrow v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

כלומר נקבל את העתקת האפס.

דוגמה:

במרחב בו $w=v$, נוכל לבחור למשל את $w_i = v_i$.

כלומר נרצה למצוא T כך ש- $T(v_i) = v_i$.

במרחב הזה נקבל את העתקה הזהות.

מציאת מטריצה המייצגת העתקה כללית

(לא דווקא מ- $\mathbb{R}^n$ ל- $\mathbb{R}^m$)

הסבר:

יהי V, W מרחבים וקטוריים. מהי $T: V \rightarrow W$? $T: \mathbb{R}_4[x] \rightarrow M_{3 \times 3}(R)$
 $1, x, x^2, x^3, x^4$ w_1, w_2, w_3, w_4, w_5

דוגמה:

$$T(v_i) = A \text{ שמקיימת } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = w_1 = w_2 = \dots = w_5$$

$$T(x+3x^2) = T(x) + 3T(x^2) = A + 3A = 4A$$

נבנה משהו טכני שמכליל בנייה שסיימנו:

תהי $T: V \rightarrow W$ העתקה לינארית.

יהי $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס סדור ל- V , $C = \{w_1, \dots, w_m\}$ בסיס סדור ל- W .

אני רוצה למצוא מטריצה A שתקיים $A[v]_B = [Tv]_C$ כפול ב-A $\longrightarrow$ לכל v .

למטריצה כזו נקרא המטריצה המייצגת את T לפי הבסיסים B ו-C
מטריצה כזו אכן קיימת ונסמן אותה ב- $[T]_C^B$

בניית $[T]_C^B$: מבדיקה מהירה נגלה שמטריצה צריכה להיות מבסדר $m \times n$.
כלומר, יש לה n עמודות שכל אחת בגודל m. נגדיר את $[T]_C^B$ להיות המטריצה
שעמודה ה-i שלה היא $[Tv_i]_C$, כלומר:
$$[T]_C^B = \left(\begin{bmatrix} [Tv_1]_C \\ [Tv_2]_C \\ \vdots \\ [Tv_n]_C \end{bmatrix} \right)$$

ואכן קיבלנו מטריצה $m \times n$.

תרגיל: יהי $\mathbb{R}_3[x] = V = W$.
יהי $B_1 = \{1, x, x^2, x^3\}$ בסיס ו- $B_2 = \{1, 1+x, x+x^2, x+2+x^3\}$ בסיס.
תהי D העתקה הזוהת. נמצא $[D]_{B_2}^{B_1}$ ו- $[D]_{B_2}^{B_2}$.

פתרון:

$$D: \underbrace{\mathbb{R}_3[x]}_{B_1} \rightarrow \underbrace{\mathbb{R}_3[x]}_{B_1}$$

$$[D]_{B_1}^{B_1} = \left([D(1)]_{B_1} \ [D(x)]_{B_1} \ [D(x^2)]_{B_1} \ [D(x^3)]_{B_1} \right)$$

$$\begin{array}{llll} D(1) & = & \vec{0} & = & 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 \\ D(x) & = & 1 & = & 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 \\ D(x^2) & = & 2x & = & \dots \\ D(x^3) & = & 3x^2 & = & \dots \end{array} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[D]_{B_2}^{B_2} = \left([D(1)]_{B_2} \ [D(1+x)]_{B_2} \ [D(x+x^2)]_{B_2} \ [D(x^2+x^3)]_{B_2} \right)$$

$$\begin{array}{llll} D(1) & = & \vec{0} & = & \dots \\ D(1+x) & = & 1 & = & 1 \cdot 1 + 0 \cdot (1+x) + 0 \cdot (x+x^2) + 0 \cdot (x^2+x^3) \\ D(x+x^2) & = & 1+2x & = & \dots \\ D(x^2+x^3) & = & 2x+3x^2 & = & \dots \end{array} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שיעור 4 - 18.03.10

תזכורת שוב על וקטור הקואורדינטות.

V מ"ו $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס ל- V .

אפשר לחשוב על וקטור הקואורדינטות כהעתקה
 $V \rightarrow \mathbb{R}^n$, $V \mapsto [V]_B$, וזו העתקה לינארית.

מה זה אומר? לכל $v, w \in V$: $[v]_B + [w]_B = [v+w]_B$
 לכל $v \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$: $\alpha[v]_B = [\alpha v]_B$

כדאי לזכור: לכל $v_i \in V$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$: $\alpha_1[v_1]_B + \dots + \alpha_n[v_n]_B = [\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n]_B$

על ייצוג העתקה (כללית) העזרת מטריצות

משפט:

תהי $T: V \rightarrow W$ העתקה לינארית

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס ל- V , $C = \{w_1, \dots, w_m\}$ בסיס ל- W

אז קיימת מטריצה שמשומנת ב- $[T]_C^B$ המקיימת $[Tv]_C = [T]_C^B [v]_B$

יתר על כן, $[T]_C^B = [Tv_1]_C [Tv_2]_C \dots [Tv_n]_C$

הוכחה:

יהי $v \in V$ כלשהי. נכתוב את v לפי הבסיס B :

$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ עבור $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$

כלומר $[v]_B = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

כמובן שנגדיר את $[T]_C^B$ להיות כמו ב- $*$.

מהגדרת כפל מטריצות

$$\begin{aligned} [T]_C^B [v]_B + B &= [Tv_1]_C \dots [Tv_n]_C \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = a_1 [Tv_1]_C + \dots + a_n [Tv_n]_C \\ &= [T(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n)]_C = [Tv]_C \end{aligned}$$

שימו לב של- $[T]_C^B$ יש n עמודות ($n = \dim V$) ויש לה m שורות ($m = \dim W$).

משפט:

באותם תנאים וסימונים של המשפט הקודם:

אם מטריצה A מסדר $n \times m$ מקיימת $A[v]_B = [Tv]_C$ אז $A = [T]_C^B$. 😊
זה בדיוק אומר שיש יחידות במשפט הקודם.

הוכחה:

מכיוון ש- A מקיימת את 😊 אז $A[v_1]_B = [Tv_1]_C$ 😊
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = A[v_1]_B = [Tv_1]_C$$

באופן דומה 😊
$$A = [T]_C^B \quad \text{כלומר} \quad \begin{bmatrix} i\text{-עמודה ה-} \\ \text{של } A \end{bmatrix} = A_i e_i = A[v_i]_B = [Tv_i]_C$$

מסקנה:

תהיינה $S: W \rightarrow U$, $T: V \rightarrow W$
B בסיס ל- V , C בסיס ל- W , D בסיס ל- U .

$$[S \circ T]_D^B = [S]_D^C [T]_C^B$$

הוכחה:

נראה ששני הצדדים מקיימים שאם ניתן להם לפעול על $[v]_B$
הם יחזירו את $S[T(v)]_D$.

$$[S \circ T(v)]_D = [S \circ T]_D^B [v]_B \quad (3)$$

מהגדרת $[S \circ T]_D^B$ היא מקיימת $[S \circ T]_D^B [v]_B = [S \circ T(v)]_D$
ומצד שני $[S]_D^C [T]_C^B [v]_B = [S]_D^C [Tv]_C = [S(Tv)]_D = [S \circ T(v)]_D$

ראינו שישנה מטריצה יחידה המקיימת תנאי זה.

$$[S \circ T]_D^B = [S]_D^C [T]_C^B \quad \text{ולכן}$$

- $[T]_C^B [v]_B = [Tv]_C$
- $[Tv]_C = A[v]_B \Rightarrow A = [T]_C^B$
- $\Leftarrow [S]_D^C [T]_C^B, [S \circ T]_D^B$ יש שוויון ביניהן

העתקת הזהות ממרחב וקטורי V לעצמו

טענה: יהי V מ"ו $B = \{v_1 \dots v_n\}$ בסיס שלו. אז $[I]_B^B = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & \dots \\ & & & 0 \end{bmatrix}$

הוכחה: העמודה הראשונה הוא

$$[I(v_1)]_B = [v_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = e_1$$

$$v_1 = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

העמודה ה- j : $[I(v_j)] = [v_j]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}_B = e_j$

$$[I]_B^B = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ e_i & \dots & e_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \underbrace{I}_{\substack{\text{מטריצת} \\ \text{היחידה}}} \quad \text{לכן}$$

מטריצות מעבר ודומיין מטריצות

בדוגמת הגזירה שראינו בשיעור הקודם ובדוגמאות שנראת / ראינו בתרגול, ראינו שמטריצת הייצוג תלויה מאוד באיזה בסיסים בחרנו ע"מ לייצג אותו. עתה נדבר רק על העתקות ממרחב וקטורי לעצמו. העתקות אלו נקראות אנדומורפיזמים.

למשל בהעתקת הגזירה $\mathbb{R}_3[x] \xrightarrow{D} \mathbb{R}_3[x]$

$$[D]_E^E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad [D]_E^E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

אלו מטריצות שונות. מה הקשר ביניהן?

נשים לב שאם $I: V \rightarrow V$, $T: V \rightarrow V$

$$T = T \circ I \quad T = I \circ T$$

טענה: יהי V מ"ו ותהי $T: V \rightarrow V$ והיו B ו- C בסיסים של V (כלשהם).

$$[T]_C^C = [I]_C^B [T]_B^B [I]_B^C$$

הוכחה: נשתמש במה שלמדנו על ייצוג הרכבת העתקות

$$\underbrace{[I]_C^B [T]_B^B [I]_B^C}_{[T]_C^C} = [I \circ T]_C^B [I]_B^C = [I \circ T \circ I]_C^C = [T]_C^C$$

מ.ש.ל.

הוכחה 2: תרגיל: פשוט מראים שכאשר שני הדצצים פועלים על $[V]_C$ הם נותנים $[Tv]_C$.

דוגמה: ראיתם / תראו שאם $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (5x + y, x + 5y)$,

$$\text{אז } [T]_E^E = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad (E = \{(1, e), (0, 1)\})$$

$$\text{ואם } B \text{ הבסיס } \{(1, 1), (1, -1)\} \text{ אז } [T]_B^B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

מה שנעשה אחרי פסח:

(4)

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = [Te_1]_E$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = [Tv]_B$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = [T]_E^E = [I]_E^B [T]_B^B [I]_B^E = [I]_E^B \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$[I]_B^E = [[I(e_1)]_B [I(e_2)]_B] = [[(1, 0)]_B [(0, 1)]_B]$$

$$(1, 0) = \underline{a}(1, 1) + \underline{b}(1, -1) = (a + b, a - b)$$

$$\begin{aligned} a + b &= 1 & a - b &= 0 \\ 2a &= 1 & a &= \frac{1}{2} & b &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (0, 1) &= (a + b, a - b) \\ a + b &= 0 & a - b &= 1 \end{aligned}$$

$$2a = 1 \quad a = \frac{1}{2} \quad b = -\frac{1}{2}$$

$$[I]_E^B = [I(1,1)]_E[(1,-1)]_E = ([I(1,1)]_E[(1,-1)]_E) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ נמצא את}$$

$$I = [I]_B^B = [I]_B^E [I]_E^B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ בדיקה:}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

הגדרה: למטריצה $[I]_C^B$ כאשר B ו-C בסיסים נקרא מטריצות מהעבר מהבסיס B לבסיס C.

סימון: מכיוון שאנו מתרכזים כרגע בהעתקות ממרחב וקטורי לעצמו,

$$[T]_B^{\text{סימן}} = [T]_B^B \text{ מקובל להשתמש בסימון}$$

טענה: יהי V מ"ו B ו-C בסיסים אז $[I]_C^B$ הפיכה ומתקיים ש- $[I]_C^B)^{-1} = [I]_B^C$

$$[I]_C^B [I]_B^C = [I]_C^C = I \text{ הוכחה:}$$

הערה: שימו לב שאם $T: T \rightarrow V$ אז $[T]_C^B$ מטריצה ריבועית. ראינו שיש קשר הדוק בין $[T]_B^B$ ל- $[T]_C^C$ והוא נתון ע"י מטריצות המעבר.

$$[T]_C^C = [I]_C^B [T]_B^B [I]_B^C$$

* אז רואים שיש קשר הדוק בין $[T]_B^B$ ל- $[T]_C^C$ ונרצה לתת לו שם.

הגדרה: מטריצות ריבועיות A ו-B נקראות **דומות** (Similar)

$$B = P^{-1} A P \text{ אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש-}$$

$$\text{ראינו ש- } [T]_B^B \text{ ו- } [T]_C^C \text{ דומות.}$$

טענה: היחס "דומות" הוא יחס שקילות על מטריצות.

הוכחה: A דומה לעצמה: $A = A^{-1} A I$

$$P B P^{-1} A \Leftrightarrow B = P^{-1} A P \text{ A דומה ל-B אז B דומה ל-A:}$$

$$\text{אם } B = P^{-1} A P, \text{ אז } C = Q^{-1} B Q = Q^{-1} P^{-1} A P Q = \underbrace{(PQ)^{-1}}_B A P Q$$

דוגמה: $T(x, y) = (5x + y, x + 5y)$

$A = \{(1, 1), (0, 1)\}$ $B = \{(1, 1), (1, -1)\}$

$\det = 24 \quad \text{tr} = 10 \quad [T]_E^E = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

$\det = 24 \quad \text{tr} = 10 \quad [T]_B^B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$\det = 24 \quad \text{tr} = 10 \quad [T]_A^A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$\underbrace{[T(1, 1)]_A}_{(6, 0)} = (6, 6) = 6(4, 1) + 0 \cdot (0, 1)$

$\underbrace{[T(0, 1)]_A}_{(1, 4)} = (1, 5) = 1(4, 1) + 4 \cdot (0, 1)$

טענה 1: למטריצת דומות יש אותה דטרמיננטה.

הוכחה: יהיו $B = P A P^{-1}$ כאשר P הפיכה.

$$|P| = |P A P^{-1}| = |P| |A| \underbrace{|P^{-1}|}_{(|P|)^{-1}} = |P| |P|^{-1} \cdot |A| = |A|$$

טענה 2: למטריצות דומות יש אותה עקבה = trace.

טענת עזר: $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

"הוכחה": נובע מנוסחה לכל מטריצות (נסו שוב).

הוכחת טענה: יהיו $B = P A P^{-1}$ כאשר P הפיכה.

$$\text{tr}(\underbrace{P A P^{-1}}_{P A P^{-1}}) = \text{tr}(P^{-1} P A) = \text{tr}(A)$$

טענה 3: למטריצות דומות יש אותה דרגה ואותה אפסיות ($\dim \text{Null}(A)$)

טענת עזר: אם P מטריצה הפיכה אז $\text{rank}(PB) = \text{rank}(B) = \text{rank}(BP)$

הוכחת ט"ע: ראינו. נראה שוב אחרי פסח.

הוכחת ט' 3: $\text{rank}(B) = \text{rank}(P A P^{-1}) = \text{rank}(A P^{-1}) = \text{rank}(A)$, $B = P A P^{-1}$

ומשפט המימד יש לה אותו אפסיות.

סיכום: יהיו A, B מטריצות דומות.

אז $|A| = |B|$

$\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$

$\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$

$\dim \text{nul}(A) = \dim \text{nul}(B)$

נדבר שוב על $T(x, y) = (5x + y, x + 5y)$: $[T]_E^E = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} ax \\ by \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

וקטורים עצמיים וערכים עצמיים

(הקדמה לאחר פסח)

$$\left| \begin{pmatrix} x-5 & -1 \\ -1 & x-5 \end{pmatrix} \right| = (x-5)^2 - 1 = 0$$

$x=6, 4$. מחפש י"ע עבור הע"ע 6:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4-5 & -1 \\ -1 & 4-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (x-5)^2 - 1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (x-5)^2 - 1 = 0$$

מצאנו בסיס של $\mathbb{R}^2$ המורכב מוקטורים עצמיים ביחס לפעולות T !!

נקר אלו $B = \{(1, 1), (1, -1)\}$ ונקבל $[T]_B^B = (אלכסונית) e = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$\dot{[T]}_B [T(1, -1)]_B$$

$$[\dot{T}] = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$[T]_B^B = \dot{T}$$

$$6(1, 1) = \underline{6}(1, 1) + \underline{0}(1, -1)$$

$$T(1, -1) = (4, -4) = 0(1, 1) + 4(1, -1)$$

אחרי פסח:

1. נלכסן מטריצות

2. לדבר על $\mathbb{R}^n$ באופן גאומטרי: מיתקיים, זוויות, וכו'.

שיעור 5 - 08.04.10 (אחרי פסח)

נושאי הקורס

1. העתקות לינאריות
2. ערכים עצמיים ולכסון מטריצות
3. היבט הגאומטריים האלגברה הלינארית המרחב האוקלידי ה-n מימד.

סיכום קצרה על העתקות לינאריות

V, W מ"ו. $T: V \rightarrow W$ לינארית אם:

- $T(v+w) = Tv + Tw$ לכל $v, w \in V$
- $T(\alpha v) = \alpha T(v)$ לכל $v \in V, \alpha \in \mathbb{R}$

ועוד

$$T(\vec{0}) = \vec{0} \quad *$$

$$ImT = \{Tv \mid v \in V\}, \quad KerT = \{v \mid Tv = \vec{0}\} \quad *$$

$$dimV = dimKerT + dimImT \quad \text{משפט המימד:}$$

1. למדנו שמטריצה $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ משרה העתקה לינארית שסומנו ב- $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$T_A(v) = Av \quad 2.$$

3. למדנו ש- $ImT_A = col(A)$, $kerT_A = nul(A)$

4. למדנו שאם $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ לינארית אז $T = T_A$ כאשר $A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ Te_1 & \cdots & Te_n \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$

5. למדנו שאם $T: V \rightarrow W$ חח"ע ועל אז הוא נקראת **איזומורפיזם**.

6. למדנו שאם $T: V \rightarrow V$ אז חח"ע $T \Leftrightarrow kerT = \{\vec{0}\}$

7. ייצוג העתקות כללית: $T: V \rightarrow W$

8. B בסיס ל- V , C בסיס ל- W . הגדרנו $[T]_C^B = [Tv_1]_C \dots [Tv_n]_C$

$$[Tv]_C = [T]_C^B [v]_B \quad \text{וראינו ש}$$

ואם בנוסף $S: W \rightarrow V$, D בסיס ל- V אז $[S \circ T]_D^B = [S]_D^C [T]_C^B$

9. קראנו למטריצה $[I]_C^B$ (כאשר $I: V \rightarrow V$ העתקת הזהות, ו- B ו- C בסיסים של V).

מטריצת מעבר מ- B ל- C :

1. הראנו ש- $I = [I]_C^B \rightarrow$ מטריצת הזהות

והראנו ש- $I = [I]_B^C [I]_C^B = [I]_B^B$

דימיון מטריצות

1. נאמר ש- A דומה ל- V אם קיימת מטריצה הפיכה D כך ש- $B = P^{-1}AP$

2. למדנו שיחס הדמיון הוא יחס שקילות.

3. משפט: יהיו A, B מטריצות דומות אז:

$$\dim \text{Nul}(A) = \dim \text{Nul}(B), \quad \text{rank}(A) = \text{rank}(B), \quad |A| = |B|, \quad \text{tr}(A) = \text{tr}(B)$$

יהיו עוד דברים.

4. נאמר ש- A לכסינה (או ניתנת ללכסון - diagonalizable)

אם A דומה למטריצה אלכסונית.

במילים אחרות, A לכסינה אם קיימת P הפיכה כך ש- $P^{-1}AP$ מטריצה אלכסונית.

5. תזכורת: מטריצה אלכסונית מהצורה

$$\text{diag}(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

6. ברור שמטריצה אלכסונית היא לכסינה (כי היא דומה לעצמה).

לעומת זאת, מטריצה לכסינית הם לא בהכרח אלכסונית.

7. לא כל מטריצה היא לכסינה, לדוגמה $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ לא לכסינה - נראה בהמשך.

מה הדוגמה העיקרית למטריצות דומות:

תהי $T: V \rightarrow V$ (בשלב זה אנחנו מתרכזים בעתקות מאותו מרחב לעצמו).

והיו B ו- C בסיסים ל- V .

סימון: $[T]_B = [T]_B^B$

הדוגמה היא $[T]_B$ דומה ל- $[T]_C$. מדוע?
 רוצים $[I]_C^B [T]_B [I]_B^C = [T]_C \iff P^{-1} [T]_B P = [T]_C$
 כלומר אם נגדיר $P = [I]_B^C$ נקבל ש- $P^{-1} [T]_B P = [T]_C$

מטריית חלק 2 (של נושאי הקורס) היא ללמוד ללכסן מטריצות.

- להבין מתי אפשר ומתי אי אפשר.
- איך ללכסן אם אפשר.
- למה זה טוב.

נאמר שאפשר ללכסן את A אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש- $P^{-1} A P$ אלכסונית.
 למטריצה P נקרא מטריצה **המלכסנת** של A .

תרגיל: תהי A מטריצה לכסינה ותהי P מטריצה המלכסנת אותה.

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{וא} \quad P = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{למשל:}$$

המשך: מצאו את A^{1000} .

$$P^{-1} A P = \text{diag}(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_n \end{pmatrix} = D \quad \text{נסמן} \quad \text{פתרון:}$$

$$A^n = (P D P^{-1})^n = * \quad \text{ולכן} \quad P D P^{-1} = A \iff D = P^{-1} A P \quad \text{ואז} \\
* = (P D P^{-1})(P D P^{-1}) \dots (P D P^{-1}) = P D^n P^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k = P \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}^k P^{-1} \quad \text{למשל במקרה שלנו}$$

תרגיל: מצאו נוסחה לסדרת פיבונצ'י מהנתונים לעיל.

$$[v]_B = a e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ a \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{המקום ה-} i \quad v \in V \quad \text{שיעביר מתקיים}$$

$$v = 0v_1 + 0v_2 + \dots + a_{vi} + 0v_{i+1} + \dots + 0v_4 = av_i$$

ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

תהי $T: V \rightarrow V$.

נאמר שוקטור $\underbrace{v \in V}_{v \neq 0}$ הוא **וקטור עצמי** של T עם **ערך עצמי** $a \in R$ אם $Tv = av$.
נאמר ש- $a \in \mathbb{R}$ ערך עצמי של T אם קיים $v \neq 0$ שהוא וקטור עצמי עם ערך עצמי a .

דוגמה: $T: V \rightarrow V$ העתקת האפס

אז כל וקטור $0 \neq$ הוא וקטור עצמי של T עם ערך עצמי 0 .
למה? $0 = Tv = 0v$

דוגמה: תהי $T = T_A$ כאשר $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ אז הוקטור $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ הוא ו"ע עם ע"ע 6 .

נבדוק: $T_A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ערכים עצמיים

משפט: תהי $T: V \rightarrow V$ לינארית. אז:

1. אם קיים בסיס B ל- V המורכב מוקטורים עצמיים של T $v_1, \dots, v_n$ אז מטריצת הייצוג של T ביחס לבסיס B הוא **אלכסונית** ואם נסמן $[T]_B = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ אז a_i הוא הערך העצמי המתאים לוקטור v_i .

2. אם $C = \{w_1, \dots, w_n\}$ בסיס של V כך ש- $[T]_C = \text{diag}(b_1, \dots, b_n)$ אז w_i הוא וקטור עצמי של T עם ערך עצמי b_i .

הוכחה: נתחיל ב-(1) אז B הוא בסיס של וקטורים עצמיים $v_1, \dots, v_n$ עם ערכים עצמיים

$a_1, \dots, a_n$ בהתאמה. כלומר, מתקיים ש- $v_1, \dots, v_n$ בסיס ל- V
ו- $T(v_1) = a_1 v_1, \dots, T(v_2) = a_2 v_2, \dots, T(v_n) = a_n v_n$.

נבדוק מהי $[T]_B$:

$$[T]_B = \left[\begin{bmatrix} \vdots \\ Tv_1 \\ \vdots \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} \vdots \\ Tv_n \\ \vdots \end{bmatrix} \right]$$

$$T v_1 = a_1 v_1 + \underbrace{0}_{?} \dots + \alpha_n v_n$$

$$[T_{v1}] = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = a_1 e_1$$

$$[T_{vi}]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_i \\ 0 \end{bmatrix} = a_i e_i \quad \text{באופן דומה}$$

$$[T]_B = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_n \end{bmatrix} = \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \quad \text{בסה"כ מקבלים}$$

סיימנו את (1). (2):

$$[Tw_1]_C = [T]_C \text{ של } i\text{-העמודה} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = b_i e_i \quad \text{ידוע לי ש-} \quad w_i \text{ פועלת על } T$$

ומהגדרת וקטור קואו' (מהתרגילון) מקבלים $Tw_i = b_i w_i$.
כלומר, w_i היא וקטור עצמי של T עם ע"ע b_i .

הגדרה:

נאמר ש- $T: V \rightarrow V$ **ניתנת ללכסון** אם קיים בסיס B כך ש- $[T]_B$ אלכסונית.
בעצם ראינו ש- T ניתנת ללכסון אם קיים בסיס L - V שמורכב מוקטורים עצמיים של T .

תהי A מטריצה $n \times n$. נרצה ללכסן את A (ז"א למצוא $P^{-1}AP$ אלכסונית).
נתבונן בהעתקה $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

נשים לב ש- $[T_A]_E = A$ כאשר E הבסיס הסטנדרטי.

נשים לב שאם נצליח ללכסן את T_A ,

כלומר נמצא בסיס B של $\mathbb{R}^n$ כך ש- T_A אלכסונית.

נקבל ש- $[T_A]_B = [I]_B^E [T_A]_E [I]_E^B$ אלסכונית $P^{-1}AP =$ כאשר $P = [I]_E^B$.

כלומר, ללכסן את A זה כמו ללכסן את T_A .

לכן מהמשפט שהראנו כדי ללכסן את A עלינו למצוא בסיס של וקטורים עצמיים של T_A .

הגדרה:

תהי A מטריצה $n \times n$.

$v \neq 0$ וקרא וקטור עצמי של A עם ערך עצמי $a \in \mathbb{R}$ אם $Av = av$.

לסיכום: בהינתן מטריצה A ריבועית $n \times n$, ע"מ ללכסון אותה צריך למצוא בסיס של $\mathbb{R}^n$ שמורכב מוקטורים עצמיים של A .

מציאת ערכים עצמיים וקטורים עצמיים של מטריצות

תהי A מטריצה $n \times n$. איך נמצא מיהם הערכים העצמיים של A ?

אנחנו מחפשים $x \in \mathbb{R}$ כך שקיים $v \neq 0$ המקיים $Av = xv$.

$$0 = xv - Av = xIv - Av = (xI - A)v$$

נעביר אגף: $(xI - A)v = 0$

1. זה קורה אם ורק אם: v הוא פתרון לא טריביאלי למערכת המשוואות ההומוגנית ש- $xI - A$ מייצגת.

$$0 = |xI - A|$$

$$v \in \text{nul}(xI - A)$$

לסיכום: הערכים העצמיים של A הם כל ה- $x \in \mathbb{R}$ המקיימים $|xI - A| = 0$.
למטריצת $xI - A$ קוראים המטריצה האופיינית של A **ולפולינום** $|xI - A|$ קוראים **הפולינום האופייני** של A .

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{דוגמאות:}$$

$$xI - A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} - A = \begin{pmatrix} x+7 & -8 \\ 6 & x-7 \end{pmatrix} \quad \text{המטריצה האופיינית של } A \text{ הוא:}$$

הפולינום האופייני של A :

$$\begin{vmatrix} x+7 & -8 \\ 6 & x-7 \end{vmatrix} = (x+7)(x-7) + 48 = x^2 - 49 + 48 = x^2 - 1 = x^2 + 0x - 1$$

שימו לב שזה פולינום מתוקן, כלומר המקדם העליון שלו הוא 1.

שימו לב שהמקדם האחרון החופשי הוא $|A| = (-1)^2 |A|$.

והמקדם של x הוא $-tr A$.

מיהם הערכים העצמיים של A ?

אלו כל ה- $x \in \mathbb{R}$ כך ש- $|xI - A| = x^2 - 1 = 0$ כלומר $x = \pm 1$.

לפי מה שראינו, לכל ערך עצמי שמצאנו נוכל למצוא לפחות וקטור עצמי אחד.

אז נעשה זאת:

ראינו שעבור $x=1$, קיים וקטור $v \neq 0$ כך ש- $(1I-A)v = \vec{0}$.

$$= \begin{pmatrix} 1+7 & -8 \\ 6 & 1-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$$

קל לראות/מדרגים ש- $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ פתרון המשוואות.

כלומר $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי עם ערך עצמי 1.

בבדוק: $Av_1 = 1 v_1$

$$\begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

שימו לב שגם $(2,2)$, (a,a) , $a \neq 0$ וקטורים עצמיים.

נמצא וקטור עצמי עם ערך עצמי $x=1$.

$$(-1I-A)v_2 = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 6 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{כלומר } v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{וקטור עצמי עם ע"ע 1}$$

$$\begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$$

דוגמאות:

קיבלנו ש- $B = \{v_1, v_2\}$ הם בסיס המורכב מ"ע" של A אז אפשר ללכסן את A!!

$$[I]_B^E [T_A]_E [I]_E^B = [T_A]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = P^{-1} A P$$

$$P = [T]_E^B = [v_1]_E [v_2]_E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{מיזו P?}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{3-4} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ולכן יתקיים}$$

$$\begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -6 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{או}$$

$$\begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}^{431} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^{431} & 0 \\ 0 & (-1)^{431} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{למשל}$$

לעשות אותו דבר שעשינו עבור $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ להסיק נוסחה לאיבר הכללי של נוסחת פיבונצ'י.

להתעלם מדף הזה (:

↪

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-1R_1 + R_3 \rightarrow R_3]{-2R_1 + R_2 \rightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2R_2 + R_3 \rightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quick Reference

ערכים עצמיים

ע"ע הופך מטריצה רגולרי לסינגולרי (אפשר לבדוק ככה)
במטריצה $n \times n$ יהיו בד"כ n ערכים עצמיים, שהסכום $\text{tr} =$ והכפלתם $\det =$
במטריצה מאונכת יהיו 2 ע"ע מורכבים. במשולשית אולי ו"ע יחיד.
במטריצה 2×2 :

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \text{tr}(A) \cdot \lambda + \det(A)$$

אם מוסיפים αI למטריצה, ע"ע נשאר יגדל ב αI וו"ע נשאר אותו דבר.

העתקה לינארית

בהינתן בסיס קלט $v_1 \dots v_n$ ובסיס פלט $w_1 \dots w_n$
למצוא את A :

$$T(v) = \underbrace{a_{1,1}} w_1 + \underbrace{a_{2,1}} w_2 + \dots + \underbrace{a_{m,1}} w_m \quad \text{עמוד 1:}$$

אינדקס

מ	ג
15.....מלכסנת	6.....גרעין
ע	ד
16.....ערך עצמי	10.....דומות
פ	ה
.....פונקציה	2.....העתקה לינארית
2.....הולכות	1.....העתקות לינארית
2.....העתקה לינארית	5.....העתקת האפס
ת	ו
6.....תמונה	16.....וקטור עצמי
4.....תמונה של צירוף לינארי	ט
	1.....טרנספורמציות לינארית